KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

HÀ HUY KHOÁI (Tổng Chủ biên)
CUNG THẾ ANH – TRẦN VĂN TẤN (đồng Chủ biên)
LÊ VĂN CƯỜNG – PHẠM ANH MINH

CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP
TOÁN 11

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM
BẢN MẪU
Tháng 11 - 2022

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

HÀ HUY KHOÁI (Tổng Chủ biên)
CUNG THẾ ANH – TRẦN VĂN TẤN (đồng Chủ biên)
LÊ VĂN CƯỜNG – PHẠM ANH MINH

Chuyên đề học tập

TOÁN 11

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM
BẢN MẪU
Tháng 11 - 2022

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

HƯỚNG DẪN SỬ DỤNG SÁCH

1. Mỗi bài học đều được thiết kế theo cấu trúc gồm những phần sau đây.

Thuật ngữ: Điểm tên các đối tượng chính của bài học.

Kiến thức, kĩ năng: Giúp em xác định những nội dung kiến thức, kĩ năng chính cần lĩnh hội và rèn luyện trong bài học.

Mở đầu: Đưa ra tình huống làm nảy sinh nhu cầu học tập; nó có thể là một bài toán thực tế đại diện, hay là một đoạn dẫn nhập. Em không cần trả lời ngay các câu hỏi hay yêu cầu được đặt ra ở phần này, mà sẽ giải quyết chúng trong bài học, sau khi đã lĩnh hội được lượng tri thức và kĩ năng cần thiết.

Mục kiến thức: Sau phần mở đầu, bài học được chia thành các mục theo từng chủ đề. Nhìn chung, mỗi đơn vị kiến thức có cấu trúc sau đây:

> **Hình thành kiến thức:** Em cần tích cực tham gia vào các hoạt động (**HĐ**) để chiếm lĩnh tri thức. Các **HĐ** này cho em cơ hội quan sát và trải nghiệm, tính toán và lập luận để đi tới khung kiến thức một cách tự nhiên.
>
> **Ví dụ:** Em có thể học ở đây phương pháp, cách lập luận và tính toán, cách trình bày lời giải bài toán.
>
> **Luyện tập:** Vận dụng kiến thức đã học, tham khảo ví dụ tương ứng, em hãy luyện tập để củng cố kiến thức và rèn luyện kĩ năng.
>
> **Vận dụng:** Trên nền tảng kiến thức và kĩ năng đã được học, em giải quyết các bài toán gắn với thực tế, kết nối tri thức với các lĩnh vực khác nhau trong học tập, khoa học và cuộc sống.

Em có thể bắt gặp một khung chữ nhằm hỗ trợ hoặc bình luận,... cho nội dung tương ứng được đề cập ở bên cạnh.

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

Ngoài bốn thành phần cơ bản ở trên, trong một đơn vị kiến thức, em còn có thể có cơ hội tham gia vào ***Khám phá***, ***Trải nghiệm***, ***Thảo luận***, trả lời ?, mở rộng hiểu biết cùng ***Em có biết?***,...

Bài tập: Em chủ động thực hiện ngoài giờ trên lớp, tuy vậy, thầy/cô sẽ dành thời lượng nhất định để cùng em điểm qua các bài tập này.

2. Các bảng tra cứu và giải thích thuật ngữ (được đặt ở cuối sách) cung cấp địa chỉ tra cứu và giải thích một số khái niệm, công thức được phát biểu trong sách.

Hãy bảo quản, giữ gìn sách giáo khoa để dành tặng các em học sinh lớp sau!

LỜI NÓI ĐẦU

Các em học sinh yêu quý!

Tập sách nhỏ này gồm ba chuyên đề: "Phép biến hình trong mặt phẳng"; "Làm quen với một vài khái niệm của Lí thuyết đồ thị"; "Một số yếu tố vẽ kĩ thuật".

Các phép biến hình được trình bày trong chuyên đề thứ nhất bao gồm phép tịnh tiến, phép đối xứng trục, phép quay và phép đối xứng tâm, phép vị tự. Phép biến hình không chỉ giúp chúng ta giải những bài tập khó, mà còn đưa chúng ta đến với thế giới phong phú của Hình học, cũng là để cảm nhận sâu hơn sự phong phú của thế giới thực tại quanh ta.

Chuyên đề "Làm quen với một vài khái niệm của Lí thuyết đồ thị" có thể xem là một con đường ngắn dẫn các em đến với một số khái niệm của Toán học hiện đại, vừa sâu sắc, vừa gần gũi, vì Lí thuyết đồ thị có rất nhiều ứng dụng trong khoa học máy tính, cũng như trong thực tiễn.

Có lẽ hầu hết các em đều yêu thích kĩ thuật. Vậy thì chuyên đề thứ ba "Một số yếu tố vẽ kĩ thuật" sẽ giúp các em làm quen với những khâu đầu tiên khi đọc một bản vẽ kĩ thuật, đó là biết cách thể hiện hình chiếu của một vật thể đơn giản, hoặc hình dung ra một vật thể khi biết các hình chiếu của nó.

Ba chuyên đề ngắn gọn, nhưng sẽ giúp chúng ta rất nhiều khi tìm kiếm vẻ đẹp của Toán học và những ứng dụng của nó trong thực tiễn.

Chúc các em học tốt!

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

MỤC LỤC

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

CHUYÊN ĐỀ 1
PHÉP BIẾN HÌNH TRONG MẶT PHẲNG

Nhìn những tấm bản đồ hành chính Việt Nam ở bên, ta thấy chúng giống nhau về hình dạng, hơn nữa, tấm *a)* và tấm *d)* còn giống nhau cả về kích thước. Toán học thể hiện điều đó như thế nào? Qua chuyên đề này, ta sẽ có câu trả lời.

Bài 1 PHÉP BIẾN HÌNH

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

THUẬT NGỮ
- Phép biến hình
- Phép đồng nhất
- Ảnh của một điểm
- Ảnh của một hình

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG
- Nhận biết khái niệm phép biến hình.
- Nhận biết khái niệm ảnh của một điểm, một hình qua một phép biến hình.

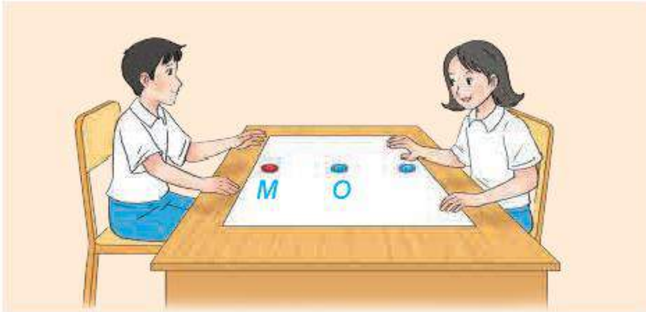
Để biểu diễn sự phụ thuộc của một đại lượng vào một đại lượng khác ta đã đi đến khái niệm hàm số. Tương tự như vậy, trong bài học này ta sẽ xây dựng đối tượng cho phép biểu diễn sự phụ thuộc của một điểm vào một điểm khác.

1. PHÉP BIẾN HÌNH

HĐ1. Hoa và Hưng cùng chơi trò sau: Hai bạn luân phiên nhau đặt các đồng xu có cùng kích thước lên trên một mặt mảnh giấy hình chữ nhật sao cho các xu nằm hoàn toàn trên mảnh giấy và xu đặt sau không chồng lên xu trước. Mỗi bạn, đến lượt mình được đặt một xu. Ai là người đầu tiên không còn chỗ để đặt xu là người thua cuộc.

Sau vài lần chơi, Hoa đã phát hiện ra cách chơi để nếu được là người đặt xu trước, Hoa sẽ thắng cuộc. Hoa cho biết sẽ đặt đồng xu đầu tiên ở vị trí O ở chính giữa mảnh giấy và đưa ra quy tắc xác định vị trí đặt đồng xu kế tiếp mỗi đồng xu Hưng đặt.

Hỏi nếu Hưng đặt đồng xu ở vị trí M thì đến lượt mình, Hoa sẽ đặt đồng xu ở vị trí nào?



Phép biến hình trong mặt phẳng là một quy tắc để ứng với mỗi điểm M thuộc mặt phẳng, xác định được duy nhất điểm M' thuộc mặt phẳng đó.

Điểm M' được gọi là **ảnh của điểm** M qua phép biến hình đó.

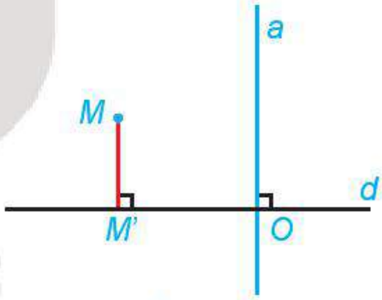
Chú ý

- Nếu kí hiệu một phép biến hình là f và M' là ảnh của điểm M qua f, thì ta nói f biến điểm M thành điểm M'. Ảnh M' của M qua f được kí hiệu là $f(M)$.
- Phép biến hình biến mỗi điểm M thành chính M được gọi là **phép đồng nhất**.

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng, cho đường thẳng d.

a) Với mỗi điểm M, gọi M' là hình chiếu vuông góc của M lên d. Chứng minh rằng quy tắc cho tương ứng điểm M với điểm M' là một phép biến hình.

b) Gọi a là một đường thẳng bất kì vuông góc với d. Chứng minh rằng tất cả các điểm thuộc a có cùng ảnh qua phép biến hình trên.



Hình 1.1

Giải

a) Mỗi điểm M đều có duy nhất hình chiếu vuông góc M' trên d (H.1.1). Do đó, quy tắc cho tương ứng điểm M với điểm M' như trên là một phép biến hình.

b) Gọi O là giao điểm của a và d. Khi đó, tất cả các điểm trên a đều có hình chiếu vuông góc trên d là O. Do đó, các điểm này có cùng ảnh là O qua phép biến hình nói trên.

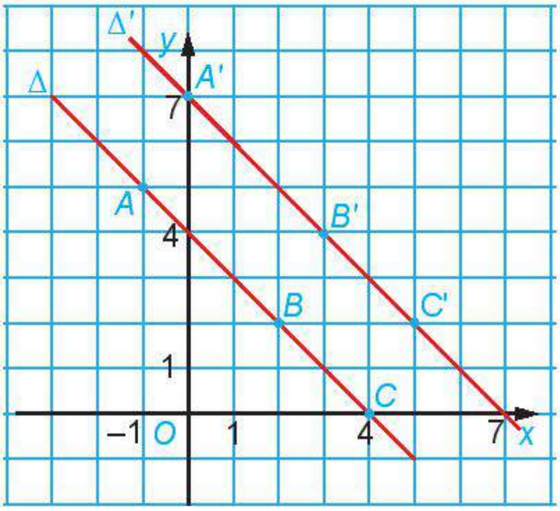
2. ẢNH CỦA MỘT HÌNH QUA MỘT PHÉP BIẾN HÌNH

HĐ2. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, cho phép biến hình f biến mỗi điểm $M(x; y)$ thành điểm $M'(x+1; y+2)$.

a) Xét các điểm $A(-1; 5)$, $B(2; 2)$, $C(4, 0)$ thuộc $\Delta: x+y-4=0$.

Xác định các ảnh của chúng qua f.

b) Chứng minh rằng nếu $M(x_0; y_0)$ là điểm thuộc đường thẳng $\Delta: x+y-4=0$ thì ảnh $M'(x_0+1; y_0+2)$ của nó thuộc đường thẳng $\Delta': x+y-7=0$.



Hình 1.2

Với mỗi hình $\mathscr{H}$, ta gọi hình $\mathscr{H}'$ gồm các điểm $M' = f(M)$, trong đó $M \in \mathscr{H}$, là ảnh của hình $\mathscr{H}$ qua phép biến hình f, và viết $\mathscr{H}' = f(\mathscr{H})$. Khi đó, ta cũng nói f biến hình $\mathscr{H}$ thành hình $\mathscr{H}'$.

Ví dụ 2. Trên mặt phẳng toạ độ Oxy, với mỗi số dương k khác 1 cho trước, xét phép biến hình f biến mỗi điểm $M(x; y)$ thành điểm $M'(x; ky)$.

a) Điểm $N'(u_0; v_0)$ là ảnh qua f của điểm nào?

b) Chứng minh rằng, phép biến hình f biến đường tròn $(C): x^2 + y^2 = R^2$ thành elip

$$(E): \frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{(kR)^2} = 1.$$

Giải

a) Điểm $N'(u_0; v_0)$ là ảnh của điểm $N(u_0; \frac{v_0}{k})$.

b) Lấy điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc đường tròn (C), khi đó $x_0^2 + y_0^2 = R^2$ và M có ảnh là $M'(x_0; ky_0)$

Ta có

$$\frac{x_0^2}{R^2} + \frac{y_0^2}{R^2} = 1, \text{ hay là } \frac{x_0^2}{R^2} + \frac{(ky_0)^2}{(kR)^2} = 1.$$

Như vậy, $M'(x_0; ky_0)$ thoả mãn phương trình elip $(E): \frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{(kR)^2} = 1$.

Vậy, nếu điểm M thuộc đường tròn (C) thì ảnh M' của nó thuộc elip (E).

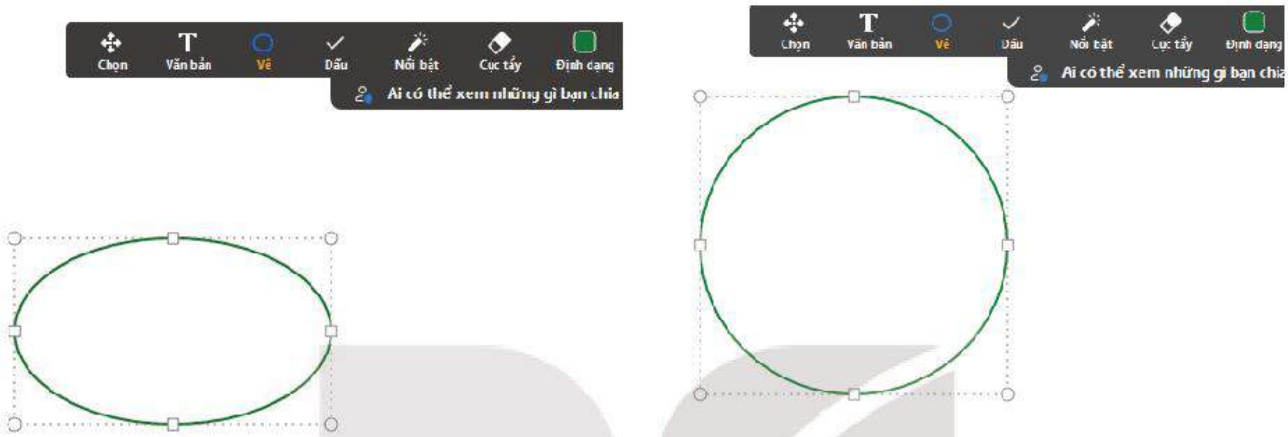
Ta lại có, nếu $\frac{u_0^2}{R^2} + \frac{v_0^2}{(kR)^2} = 1$ thì $u_0^2 + \left(\frac{v_0}{k}\right)^2 = R^2$.

Do đó, mỗi điểm $N'(u_0; v_0)$ thuộc elip (E) đều là ảnh của điểm $N(u_0; \frac{v_0}{k})$ thuộc đường tròn (C).

Vậy f biến đường tròn (C) thành elip (E).

Chú ý

- Phép f trong Ví dụ 2 được gọi là phép co về trục hay dãn xa trục Ox nếu k tương ứng là nhỏ hơn hay lớn hơn 1.
- Các phép co, dãn biến đường tròn thành elip và biến elip thành elip hoặc đường tròn. Nhiều phần mềm vẽ hình và xử lí hình ảnh có sử dụng phép co dãn. Chẳng hạn, trên một số phần mềm, để vẽ đường tròn, ta lại bắt đầu với một elip và sau đó điều chỉnh để hình chữ nhật cơ sở trở thành hình vuông (giữ nguyên một chiều của hình chữ nhật, chỉ điều chỉnh chiều còn lại).



Hình 1.3: Vẽ đường tròn trên Witeboard bằng cách bắt đầu với elip

Vận dụng 1. Quan sát ba tấm ảnh hoa hồng ở Hình 1.4, hãy cho biết hình nào giống ảnh của hình ở giữa qua một phép co về trục.

Hình 1.4

BÀI TẬP

1.1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm $I(1; 2)$. Xét phép biến hình f biến điểm I thành điểm I và biến mỗi điểm M khác I thành điểm M' sao cho I là trung điểm của MM'. Tìm toạ độ ảnh của điểm $A(3; -2)$ qua phép biến hình f.

1.2. Trong bảng bên quan sát quy luật điền các cặp (A, A'), (B, B'), (C, C'),..., từ đó điền các kí hiệu N', P', Q', R', S' vào các vị trí thích hợp.

P		L'	N	M'
R	K	S	I'	E'
B	H	G	A'	C
F'	D		D'	F
C'	A	G'	H'	
E	I		K'	B'
M		L	Q	

Bài 2

PHÉP TỊNH TIẾN

THUẬT NGỮ

- Phép tịnh tiến
- Vectơ tịnh tiến

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

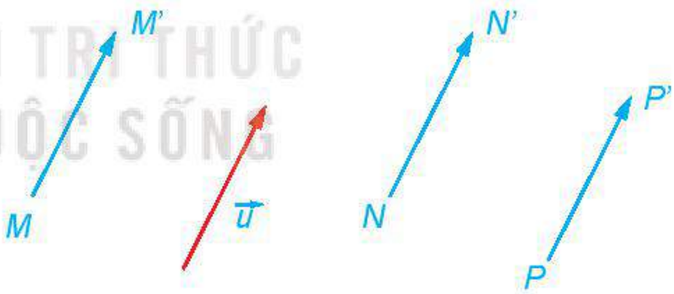
- Nhận biết phép tịnh tiến và các tính chất của phép tịnh tiến.
- Xác định ảnh của điểm, đoạn thẳng, tam giác, đường tròn qua phép tịnh tiến.
- Vận dụng phép tịnh tiến trong đồ hoạ và trong một số vấn đề thực tiễn.

Khi diễu hành, để đội hình được giữ vững, ở mỗi bước, những người tham gia cần tiến đều nhau về cùng một hướng. Điều này có gì liên quan tới Toán học?

Khối hồng kì trong Đại lễ kỉ niệm 1000 năm Thăng Long – Hà Nội (Ảnh: qdnd.vn)

1. PHÉP TỊNH TIẾN

HĐ1. Ở mỗi bước của đội hình diễu hành, gọi vectơ dịch chuyển của mỗi người tham gia là vectơ có điểm gốc và điểm ngọn tương ứng là vị trí trước và sau khi bước của người đó. Để giữ vững đội hình, ở mỗi bước, các vectơ dịch chuyển của những người tham gia cần có mối quan hệ gì với nhau?



Hình 1.5

Cho vectơ $\vec{u}$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ gọi là phép tịnh tiến theo $\vec{u}$, kí hiệu $T_{\vec{u}}$. Vectơ $\vec{u}$ được gọi là vectơ tịnh tiến.

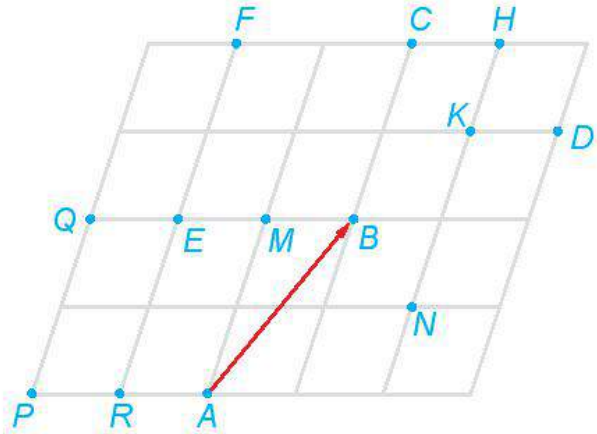
Chú ý. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{0}$ là phép đồng nhất.

? Nếu phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ biến điểm M thành điểm M' thì phép tịnh tiến $T_{-\vec{u}}$ biến điểm M' thành điểm nào?

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, xác định phép tịnh tiến biến điểm $A(1;2)$ thành điểm $A'(2;5)$.

Giải

Giả sử phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ biến điểm $A(1;2)$ thành $A'(2;5)$. Khi đó $\overrightarrow{AA'}=\vec{u}$. Mặt khác, $\overrightarrow{AA'}=(1;3)$ nên $\vec{u}=(1;3)$. Vậy phép tịnh tiến biến $A(1;2)$ thành điểm $A'(2;5)$ là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}=(1;3)$.



Hình 1.6

Luyện tập 1. Trong Hình 1.6, tìm ảnh của các điểm M, N, P, Q, B qua phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AB}$.

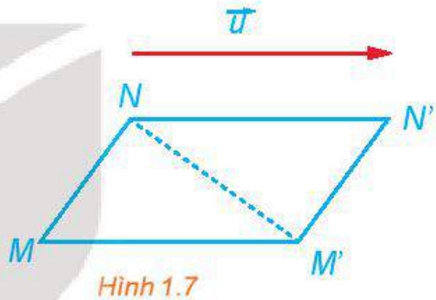
Vận dụng 1. Bạn Hùng tham gia vào một khối diễu hành. Trong khi diễu hành, mỗi bước Hùng tiến về hướng đông 30 cm. Để giữ vững đội hình, sau mỗi bước, tất cả mọi người tham gia trong khối diễu hành của Hùng cần dời tới vị trí mới là ảnh của vị trí cũ qua phép biến hình nào?

2. TÍNH CHẤT

HĐ2. Phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ biến M thành M', N thành N' (H.1.7).

a) Có nhận xét gì về $\overrightarrow{MM'}+\overrightarrow{M'N}$ và $\overrightarrow{M'N}+\overrightarrow{NN'}$.

b) Tìm mối quan hệ giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{M'N'}$.



Hình 1.7

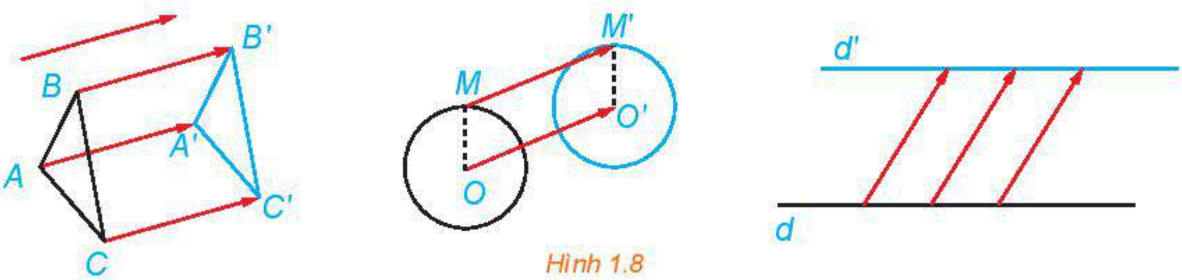
Nếu phép tịnh tiến biến các điểm M, N tương ứng thành các điểm M', N' thì $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{M'N'}$.

Vậy phép tịnh tiến bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm.

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

Từ tính chất trên, ta có thể rút ra:

Phép tịnh tiến biến:
- Đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó;
- Tam giác thành tam giác bằng nó;
- Đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính và có tâm là ảnh của tâm;
- Ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó;
- Tia thành tia;
- Góc thành góc bằng nó;
- Đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.



Hình 1.8

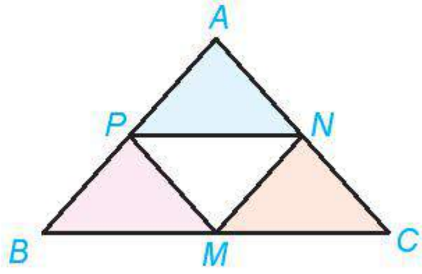
Ví dụ 2. Cho tam giác ABC và M, N, P tương ứng là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB.

Tìm ảnh của tam giác BMP qua các phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BM}}$ và $T_{\overrightarrow{BP}}$.

Giải (H.1.9)

Vì $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{BM}$ nên phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BM}}$ biến các điểm B, M, P tương ứng thành M, C, N. Do đó, $T_{\overrightarrow{BM}}$ biến tam giác BMP thành tam giác MCN.

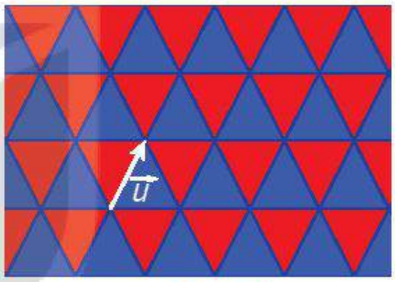
Vì $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{BP}$ nên phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BP}}$ biến các điểm B, M, P tương ứng thành P, N, A. Do đó, $T_{\overrightarrow{BP}}$ biến tam giác BMP thành tam giác PNA.



Hình 1.9

Luyện tập 2. Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm O' khác điểm O. Với mỗi điểm M thuộc $(O; R)$ sao cho O, O', M không thẳng hàng, vẽ hình bình hành $MOO'M'$. Hỏi khi M thay đổi trên $(O; R)$ thì M' thay đổi trên đường nào?

Vận dụng 2. Trong việc lát mặt phẳng bởi các tam giác đều bằng nhau như được thể hiện trong Hình 1.10, phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ có biến mỗi viên gạch màu xanh thành một viên gạch màu xanh, mỗi viên gạch màu đỏ thành một viên gạch màu đỏ hay không?



Hình 1.10

BÀI TẬP

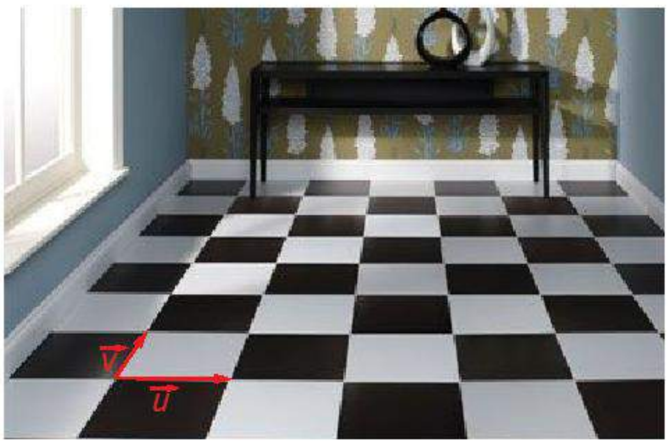
1.3. Cho $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ. Hỏi phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$ biến Δ thành đường thẳng nào?

1.4. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$ và vectơ $\vec{u} = (3; 4)$.

a) Xác định ảnh của tâm đường tròn (C) qua phép tịnh tiến $T_{\vec{u}}$.

b) Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của (C) qua $T_{\vec{u}}$.

1.5. Trong việc lát sàn nhà như Hình 1.11, viên gạch ở hàng dọc thứ 4 từ trái sang và hàng ngang thứ 2 từ dưới lên là ảnh của viên gạch ở góc dưới bên trái qua phép tịnh tiến theo vectơ nào? (Gợi ý: Tính vectơ tịnh tiến đó theo hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ trên hình vẽ).



Hình 1.11

Bài 3 PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

THUẬT NGỮ

- Phép đối xứng trục

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết phép đối xứng trục và các tính chất của phép đối xứng trục.
- Xác định ảnh của điểm, đoạn thẳng, tam giác, đường tròn qua phép đối xứng trục.
- Vận dụng phép đối xứng trục trong đồ hoạ và trong một số vấn đề thực tiễn.

Trong tự nhiên, cuộc sống, Toán học, Kiến trúc và Hội hoạ, ta bắt gặp nhiều hình ảnh cân đối. Sự cân đối có thể mang lại vẻ đẹp, làm nên sự vững chắc và nhiều điều ý nghĩa khác. Ở lớp 6, ta đã biết nhận ra các hình ảnh hai chiều có trục đối xứng. Bài học này cho phép ta diễn đạt chính xác và rõ ràng hơn về chúng.

Nhà Rông Tây Nguyên
(Ảnh: dantocmiennui.vn)

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

1. PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

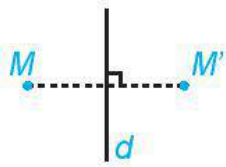
HĐ 1. Cầu Ponte Sisto in hình dưới dòng sông Tiber, tạo nên một hình ảnh có tính đối xứng trục.

a) Hãy chỉ ra trục đối xứng của hình ảnh đó.

b) Có thể đếm được bao nhiêu hình bóng điện dưới dòng sông? Mỗi hình đó là ảnh dưới sông của bóng điện nào trên cầu?

Cầu Ponte Sisto ở Thủ đô Rome của nước Ý

Cho đường thẳng d. Phép biến hình biến mỗi điểm M thuộc d thành chính nó và biến mỗi điểm M không thuộc d thành điểm M' sao cho d là đường trung trực của đoạn thẳng MM' được gọi là phép đối xứng trục d, kí hiệu $Đ_d$.

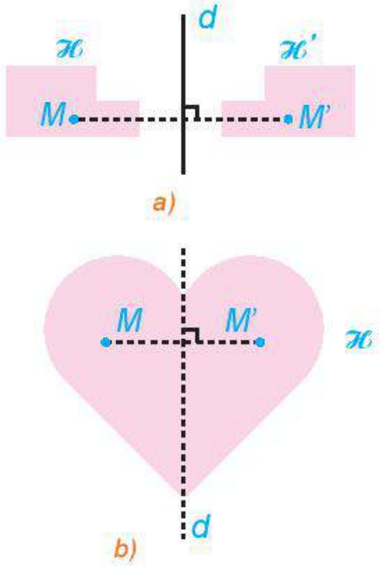


Hình 1.12

Chú ý

- Nếu M' là ảnh của M qua $Đ_d$ thì M cũng là ảnh của M' qua $Đ_d$. Do đó, nếu hình $\mathcal{H}'$ là ảnh của hình $\mathcal{H}$ qua $Đ_d$ thì $\mathcal{H}$ cũng là ảnh của $\mathcal{H}'$ qua $Đ_d$, và ta nói $\mathcal{H}$ và $\mathcal{H}'$ đối xứng với nhau qua d (H.1.13*a*).

- Hình $\mathcal{H}$ nhận đường thẳng d là trục đối xứng khi và chỉ khi $Đ_d$ biến $\mathcal{H}$ thành chính nó (H.1.13*b*).



Hình 1.13

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, tìm toạ độ ảnh của các điểm $M(3; 4)$, $N(-1; 2)$, qua phép đối xứng trục

$$\Delta : x + 3y - 15 = 0.$$

Giải

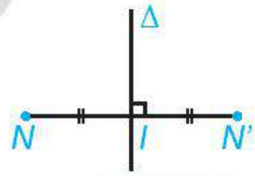
Toạ độ của điểm $M(3; 4)$ thoả mãn phương trình đường thẳng Δ. Do đó, $M(3; 4)$ thuộc Δ và có ảnh qua phép đối xứng trục Δ chính là $M(3; 4)$.

Điểm $N(-1; 2)$ không thuộc Δ. Gọi N' là ảnh của N qua phép đối xứng trục Δ (H.1.14). Do Δ là đường trung trực của đoạn thẳng NN' nên trung điểm của đoạn thẳng NN' thuộc Δ và đường thẳng NN' vuông góc với Δ.

Đường thẳng NN' đi qua $N(-1; 2)$ và nhận vectơ pháp tuyến $\vec{u} = (1; 3)$ của Δ làm vectơ chỉ phương.

Do đó

$$NN' : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + 3t \end{cases}.$$



Hình 1.14

Giả sử toạ độ của N' là $(-1 + t; 2 + 3t)$.

Đoạn thẳng NN' có trung điểm $I\left(\dfrac{-1+(-1+t)}{2}; \dfrac{2+(2+3t)}{2}\right)$ thuộc Δ nên

$$\left(-1+\frac{t}{2}\right)+3\left(2+\frac{3t}{2}\right)-15=0 \Leftrightarrow t=2. \text{ Suy ra } N'(1; 8).$$

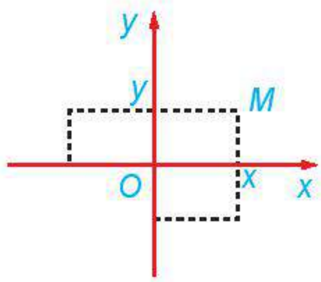
Vậy điểm $N(-1; 2)$ có ảnh qua phép đối xứng trục Δ là $N'(1; 8)$.

Luyện tập 1. Xét mặt phẳng toạ độ Oxy (H.1.15). Trong các khẳng định sau, chọn các khẳng định đúng.

a) Phép đối xứng trục Ox biến mỗi điểm $M(x; y)$ thành điểm có toạ độ $(x; -y)$.

b) Phép đối xứng trục Oy biến mỗi điểm $M(x; y)$ thành điểm có toạ độ $(-x; y)$.

c) Phép đối xứng trục Ox biến $A(1; 2)$ thành điểm $A'(-1; -2)$.



Hình 1.15

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

2. TÍNH CHẤT

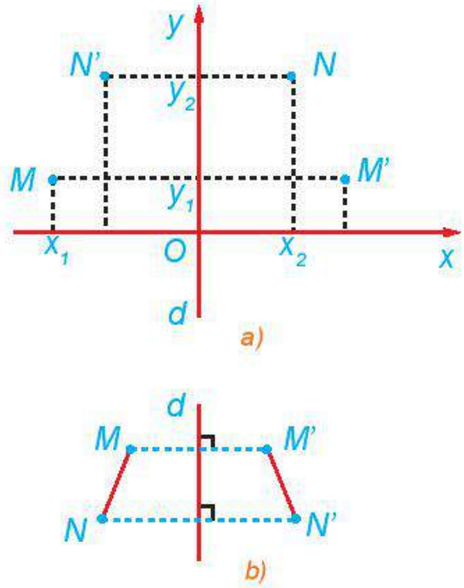
HĐ 2. Cho phép đối xứng trục d biến M thành M', N thành N'.

Xét hệ trục toạ độ Oxy sao cho trục Oy trùng với d (H.1.16*a*). Giả sử M có toạ độ là $(x_1; y_1)$, N có toạ độ là $(x_2; y_2)$.

a) Hãy cho biết toạ độ của M', N'.

b) Tính MN^2, $M'N'^2$ theo toạ độ của các điểm tương ứng.

c) So sánh độ dài các đoạn thẳng MN, $M'N'$.

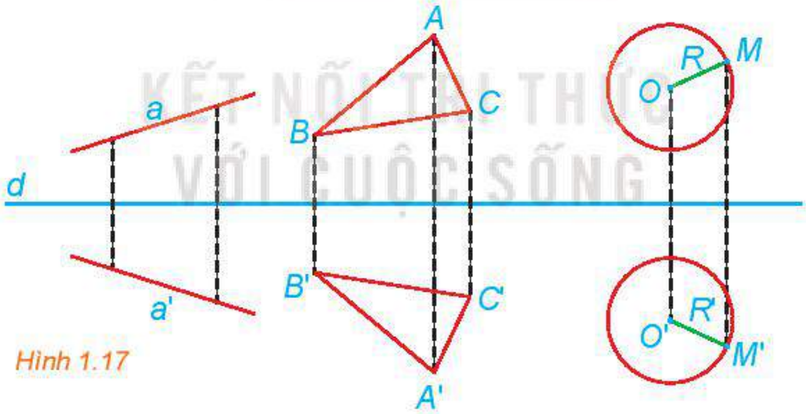


Hình 1.16

Phép đối xứng trục bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm.

Từ tính chất trên, ta có thể rút ra:

Phép đối xứng trục biến:
- Đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó;
- Tam giác thành tam giác bằng nó;
- Đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính và có tâm là ảnh của tâm;
- Ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó;
- Tia thành tia;
- Góc thành góc bằng nó;
- Đường thẳng thành đường thẳng.



Hình 1.17

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn

$$(C): x^2 + y^2 - 6x - 10y - 2 = 0.$$

Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép đối xứng trục $\Delta: x + 2y - 3 = 0$.

Giải

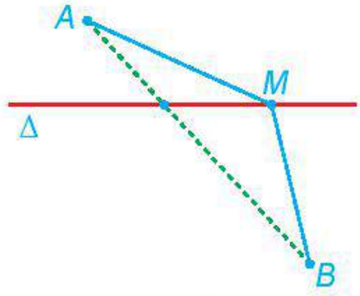
Ta có $(C): (x-3)^2 + (y-5)^2 = 6^2$, nên (C) có tâm $A(3; 5)$ và bán kính $R = 6$. Đường tròn ảnh (C') có bán kính $R' = R = 6$ và có tâm A' đối xứng với A qua Δ. Tương tự Ví dụ 1, ta tính được toạ độ của A' là $(-1; -3)$. Vậy (C') có phương trình là $(x+1)^2 + (y+3)^2 = 6^2$.

Luyện tập 2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng $d: 3x - y - 1 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng d qua phép đối xứng trục Ox.

Ví dụ 3. Cho đường thẳng Δ và hai điểm A, B không thuộc đường thẳng đó. Tìm điểm M thuộc Δ để $MA + MB$ nhỏ nhất.

Giải

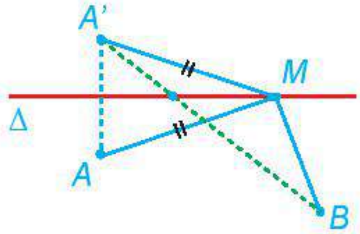
Trường hợp 1. A và B thuộc hai nửa mặt phẳng bờ Δ (H.1.18a). Khi đó đoạn thẳng AB và đường thẳng Δ giao nhau tại một điểm.



Hình 1.18a

Ta có $MA + MB \geq AB$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M thuộc đoạn thẳng AB. Mặt khác M thuộc Δ, do đó, $MA + MB$ nhỏ nhất bằng AB, khi M là giao điểm của Δ và đoạn thẳng AB.

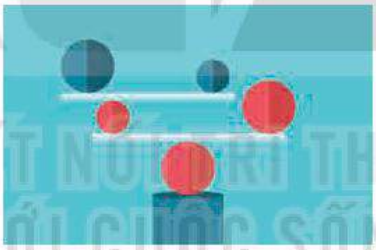
Trường hợp 2. A và B thuộc cùng nửa mặt phẳng bờ Δ (H.1.18b). Gọi A' là điểm đối xứng với A qua Δ. Khi đó A' và B thuộc hai nửa mặt phẳng bờ Δ và $MA + MB = MA' + MB$. Mặt khác, theo trường hợp 1, ta có $MA' + MB$ nhỏ nhất bằng $A'B$, khi M là giao điểm của Δ và đoạn thẳng $A'B$. Do đó, $MA + MB$ nhỏ nhất bằng $A'B$, khi M là giao điểm của Δ và đoạn thẳng $A'B$.

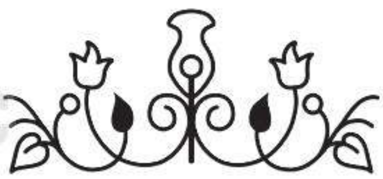


Hình 1.18b

Luyện tập 3. Cho đường thẳng Δ và hai điểm A, B, sao cho Δ không phải là đường trung trực của đoạn thẳng AB. Điểm M thay đổi trên Δ (M không thuộc đường thẳng AB). Gọi M' là điểm sao cho A, B, M, M' là 4 đỉnh của một hình thang cân nhận AB là một cạnh đáy. Chứng minh rằng M' thay đổi trên một đường thẳng cố định.

Vận dụng. Bằng quan sát, hãy cho biết, trong hai hình ảnh bên, hình nào có trục đối xứng.





KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

BÀI TẬP

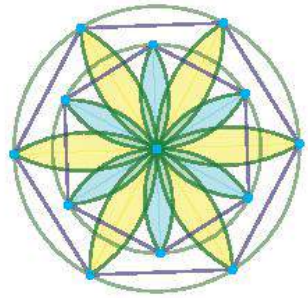
1.6. Cho hai điểm phân biệt A và B. Xác định phép đối xứng trục biến điểm A thành điểm B.

1.7. Cho hai đường tròn không đồng tâm, nhưng có cùng bán kính $(O_1; R)$ và $(O_2; R)$. Xác định phép đối xứng trục biến $(O_1; R)$ thành $(O_2; R)$.

1.8. Cho đường thẳng d và hai điểm phân biệt A, B sao cho đường thẳng AB không vuông góc với d. Gọi M, N tương ứng là các điểm đối xứng với A, B qua d. Hỏi A, B, M, N có là 4 đỉnh của một hình thang cân hay không?

1.9. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho $\Delta : x + 2y - 1 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d đối xứng với Δ qua trục Ox.

1.10. Dùng com-pa, thước kẻ, bút, hãy vẽ lại các nét thẳng và tròn trong Hình 1.19.


Hình 1.19

Bài 4
PHÉP QUAY VÀ PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

THUẬT NGỮ

- Phép quay
- Góc quay, tâm quay,
- Phép đối xứng tâm
- Tâm đối xứng

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết phép quay, phép đối xứng tâm và các tính chất của chúng.
- Xác định ảnh của điểm, đoạn thẳng, tam giác, đường tròn qua phép quay, phép đối xứng tâm.
- Vận dụng phép quay, phép đối xứng tâm trong đồ hoạ và trong một số vấn đề thực tiễn.

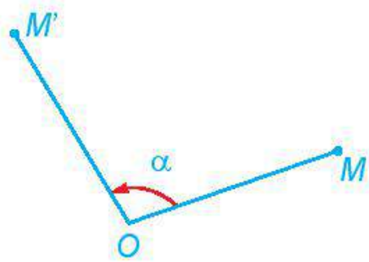
Bàn ăn tròn đông người thường được thiết kế sao cho mặt bàn tròn nơi đặt đồ ăn có thể quay quanh tâm của nó. Nhờ đó, đồ ăn trên bàn có thể đi tới được gần từng người, mà vị trí đặt mặt bàn không bị dịch chuyển. Cơ sở toán học nào cho phép thực hiện điều đó?

Mặt bàn tròn nơi đặt đồ ăn (hình tròn nhỏ) có thể quay quanh tâm của nó.

1. PHÉP QUAY

HĐ1. Ở mặt bàn ăn quay nói trên, trong một lần quay, nếu một đĩa thức ăn trên bàn được quay một phần tư vòng tới vị trí mới, thì mỗi đĩa không đặt ở chính giữa bàn có được quay một phần tư vòng tới vị trí mới hay không?

Cho điểm O và góc lượng giác α. Phép biến hình biến điểm O thành điểm O và biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho $OM' = OM$ và các góc lượng giác $(OM, OM') = \alpha$ gọi là phép quay tâm O, góc quay α, kí hiệu $Q_{(O,\alpha)}$. Điểm O gọi là tâm quay, α gọi là góc quay của phép quay đó.



Hình 1.20a

? Phép quay với góc quay bằng 0 có gì đặc biệt?

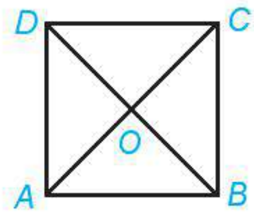
Chú ý

- Chiều dương, chiều âm của đường tròn lượng giác được quy ước tương ứng là ngược chiều, cùng chiều quay của kim đồng hồ (H.1.20*b*).
- Hai phép quay có cùng tâm và có hai góc quay sai khác nhau bội của 2π (hay $360°$) thì trùng nhau.

Hình 1.20b

Ví dụ 1. Trong Hình 1.21, $ABCD$ là hình vuông có tâm O. Hãy chỉ ra ảnh của điểm A qua các phép quay $Q_{\left(O, \frac{\pi}{2}\right)}$, $Q_{\left(O, -\frac{\pi}{2}\right)}$, $Q_{(O, \pi)}$, $Q_{\left(O, \frac{3\pi}{2}\right)}$.

Giải



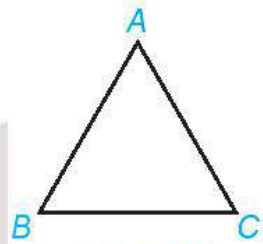
Hình 1.21

Vì $OA = OB$ và góc quay $\frac{\pi}{2}$ nên phép quay $Q_{\left(O, \frac{\pi}{2}\right)}$ biến điểm A thành điểm B.

Vì $OA = OD$ và góc quay $-\frac{\pi}{2}$ nên phép quay $Q_{\left(O, -\frac{\pi}{2}\right)}$ biến điểm A thành điểm D.

Tương tự, phép quay $Q_{(O, \pi)}$ biến điểm A thành điểm C, phép quay $Q_{\left(O, \frac{3\pi}{2}\right)}$ biến điểm A thành điểm D.

Luyện tập 1. Trong Hình 1.22, tam giác ABC đều.



Hình 1.22

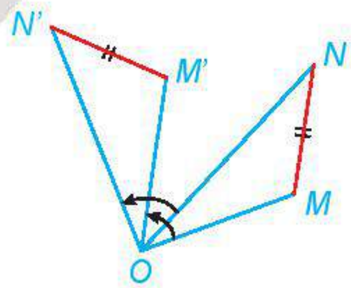
Hãy chỉ ra ảnh của điểm B qua phép quay $Q_{(A, 60^\circ)}$.

Gọi D là ảnh của C qua phép quay $Q_{(A, 60^\circ)}$.

Hỏi B và D có mối quan hệ gì đối với đường thẳng AC?

2. TÍNH CHẤT CỦA PHÉP QUAY

HĐ 2. Khi mặt bàn ăn quay, mặc dù các đĩa thức ăn trên bàn đều dịch chuyển tới vị trí mới nhưng khoảng cách giữa hai đĩa thức ăn có bị thay đổi hay không?



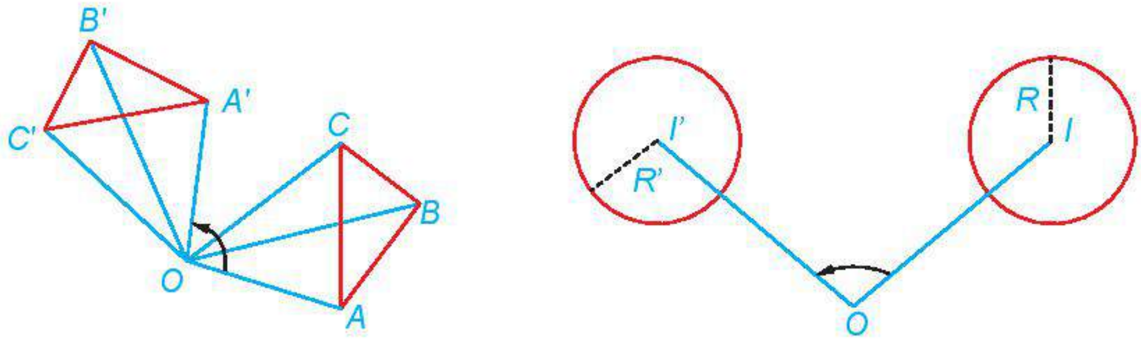
Hình 1.23

Phép quay bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Từ tính chất trên, ta có thể rút ra:

Phép đối xứng trục biến:

- Đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó;
- Tam giác thành tam giác bằng nó;
- Đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính và có tâm là ảnh của tâm;
- Ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó;
- Tia thành tia;
- Góc thành góc bằng nó;
- Đường thẳng thành đường thẳng.

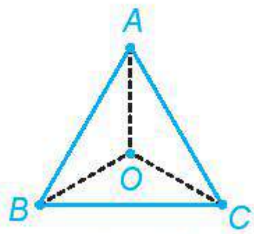


Hình 1.24

Ví dụ 2. Trong Hình 1.25, ABC là tam giác đều, có tâm O. Tìm ảnh của đoạn thẳng AB và ảnh của tam giác ABC qua phép quay $Q_{(O,\,120^\circ)}$.

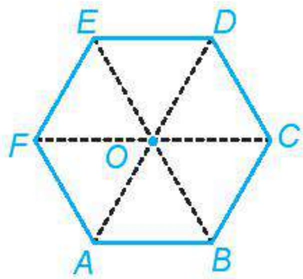
Giải

Phép quay $Q_{(O,\,120^\circ)}$, biến A thành B, biến B thành C, biến C thành A. Do đó, phép quay $Q_{(O,\,120^\circ)}$ biến đoạn thẳng AB thành đoạn thẳng BC và biến tam giác ABC thành chính nó.



Hình 1.25

Luyện tập 2. Trong Hình 1.26, $ABCDEF$ là lục giác đều có tâm O. Tìm ảnh của tam giác ACE qua các phép quay $Q_{\left(O,\,\frac{\pi}{3}\right)}$, $Q_{\left(O,\,-\frac{2\pi}{3}\right)}$.



Hình 1.26

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

Vận dụng 1. Trong tình huống mở đầu, mặt bàn tròn đặt đồ ăn được thiết kế để có thể quay quanh tâm mặt bàn. Coi mặt bàn tròn là hình tròn tâm O, bán kính R. Hỏi, khi thực hiện phép quay tâm O với góc quay α bất kì thì:

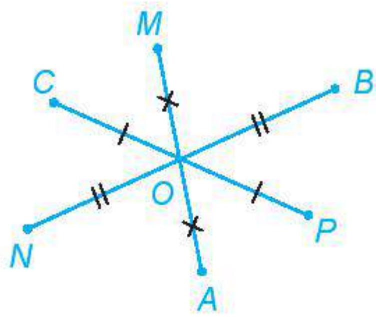
– Điểm O biến thành điểm nào?

– Đường tròn (O, R) biến thành đường tròn nào?

– Vị trí của mặt bàn có bị dịch chuyển hay không?

3. PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

HĐ2. Trong Hình 1.27, hãy chỉ ra ảnh của các điểm A, B, C, M, N, P qua phép quay tâm O, góc quay π.



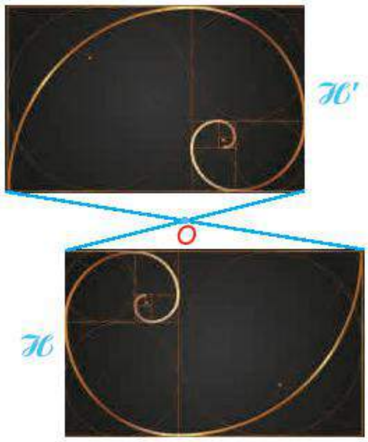
Hình 1.27

Phép biến hình biến điểm O thành điểm O và biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho O là trung điểm của đoạn thẳng MM' được gọi là phép đối xứng tâm O, kí hiệu $Đ_O$. Điểm O được gọi là tâm đối xứng.

Hình 1.28

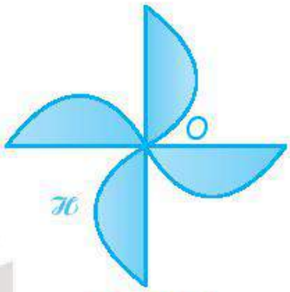
Nhận xét

- Phép đối xứng tâm O chính là phép quay tâm O, góc quay π, do đó, nó có đầy đủ các tính chất của phép quay.



Hình 1.29a

- Nếu M' là ảnh của M qua $Đ_O$ thì M cũng là ảnh của M' qua $Đ_O$. Do đó, nếu hình $\mathscr{H}'$ là ảnh của hình $\mathscr{H}$ qua $Đ_O$ thì $\mathscr{H}$ cũng là ảnh của $\mathscr{H}'$ qua $Đ_O$, và ta nói $\mathscr{H}$ và $\mathscr{H}'$ đối xứng với nhau qua O (H.1.29*a*).
- $Đ_O$ biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.
- Hình $\mathscr{H}$ nhận điểm O là tâm đối xứng khi và chỉ khi $Đ_O$ biến $\mathscr{H}$ thành chính nó (H.1.29*b*).



Hình 1.29b

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: x+3y-2=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ' đối xứng với đường thẳng Δ qua điểm $I(1; 2)$.

Giải

Lấy hai điểm $A(2; 0)$ và $B(-1; 1)$ thuộc đường thẳng Δ. Gọi A', B' tương ứng là các điểm đối xứng với A, B qua $I(1; 2)$. Vì Δ' đối xứng với Δ qua $I(1; 2)$ nên Δ' đi qua A', B'.

Do I là trung điểm của đoạn thẳng AA' nên toạ độ $(x_{A'}; y_{A'})$ của A' thoả mãn

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{2+x_{A'}}{2} \\ 2 = \dfrac{0+y_{A'}}{2} \end{cases} \Rightarrow A'(0; 4).$$

Do I là trung điểm của đoạn thẳng BB' nên toạ độ $(x_{B'}; y_{B'})$ của B' thoả mãn

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{-1+x_{B'}}{2} \\ 2 = \dfrac{1+y_{B'}}{2} \end{cases} \Rightarrow B'(3; 3).$$

Đường thẳng Δ' đi qua $A'(0; 4)$ và $B'(3; 3)$ nên nhận $\overrightarrow{A'B'} = (3; -1)$ là một vectơ chỉ phương.

Do đó, $\vec{n} = (1; 3)$ là một vectơ pháp tuyến của Δ'. Vậy Δ' có phương trình

$$1(x-0)+3(y-4)=0 \Leftrightarrow x+3y-12=0.$$

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

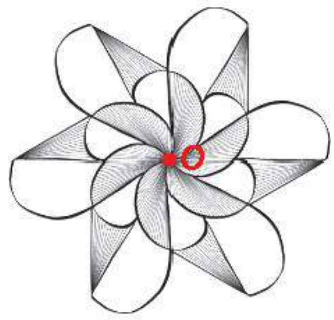
Luyện tập 3. Cho hình bình hành $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O. Tìm ảnh của đường thẳng AB qua $Đ_O$.

Vận dụng 2. Quan sát Hình 1.30, những phát biểu nào trong các phát biểu sau là đúng?

a) Hình vẽ nhận điểm O (được tô đỏ) làm tâm đối xứng.

b) Một đường thẳng bất kì đi qua điểm O sẽ chia hình vẽ thành hai nửa $\mathscr{A}$ và $\mathscr{B}$ giống nhau. Nếu thực hiện phép quay tâm O, góc quay 180° thì nửa $\mathscr{A}$ biến thành nửa $\mathscr{B}$, tức là, $\mathscr{B}$ là ảnh của $\mathscr{A}$ qua một phép đối xứng tâm O.

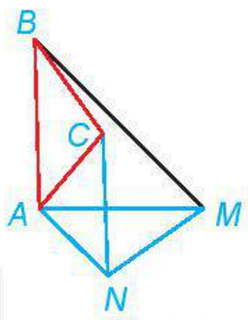
c) Có thể chia hình vẽ thành bốn phần giống nhau.



Hình 1.30

BÀI TẬP

1.11. Trong Hình 1.31, BAM và CAN là các tam giác vuông cân tại A. Hãy chỉ ra một phép quay biến tam giác ABC thành tam giác AMN.



Hình 1.31

1.12. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O. Trên đường tròn ngoại tiếp hình vuông, theo chiều dương (ngược chiều kim đồng hồ), thứ tự các đỉnh hình vuông là A, B, C, D.

a) Tìm ảnh của các điểm A, B, C, D qua phép quay tâm O góc quay $\frac{\pi}{2}$.

b) Mỗi phép quay $Q_{(O,\,0)}$, $Q_{\left(O,\,\frac{\pi}{2}\right)}$, $Q_{(O,\,\pi)}$, $Q_{\left(O,\,\frac{3\pi}{2}\right)}$ biến hình vuông $ABCD$ thành hình nào?

1.13. Cho hình bình hành $ABCD$ với tâm O.

a) Tìm ảnh của đường thẳng AB qua phép đối xứng tâm O.

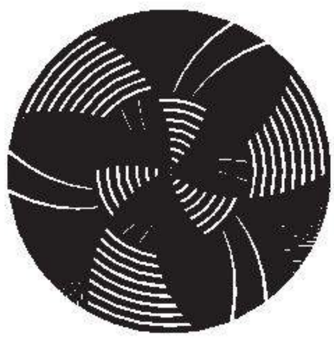
b) Tìm ảnh của tam giác ABC qua phép đối xứng tâm O.

1.14. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn $(C): (x-2)^2 + y^2 = 1$.

a) Tìm toạ độ tâm đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua $Q_{\left(O,\,\frac{\pi}{2}\right)}$.

b) Viết phương trình (C').

1.15. Bằng quan sát Hình 1.32, hãy chỉ ra một cách cắt hình đó thành ba phần giống nhau.



Hình 1.32

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

Bài 5 PHÉP DỜI HÌNH

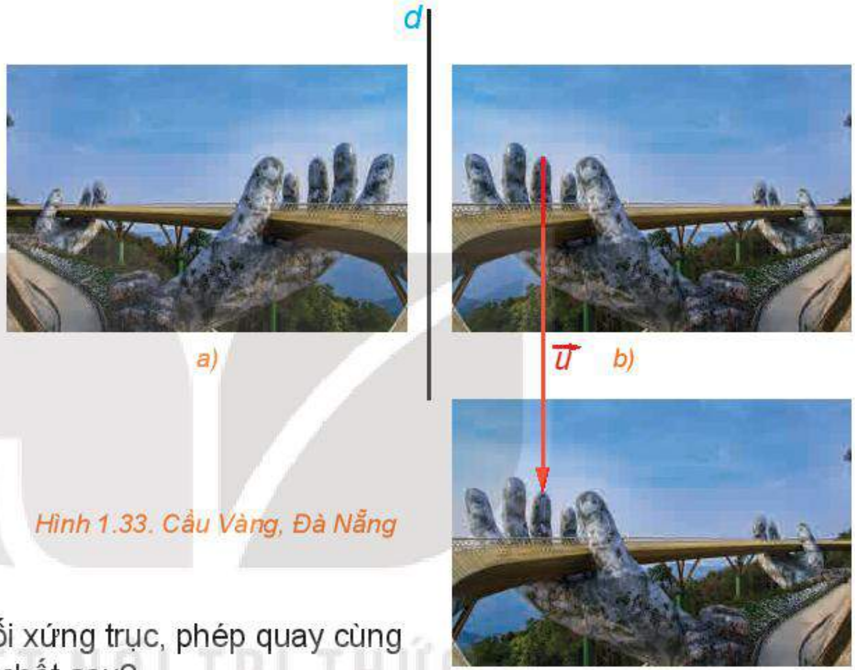
THUẬT NGỮ

Phép dời hình

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết khái niệm phép dời hình.
- Vận dụng phép dời hình vào thiết kế đồ hoạ.

Bằng quan sát, ta có cảm nhận rằng ba hình *a*), *b*), *c*) bằng nhau. Nếu cắt giấy, lấy riêng ra từng hình, thì ta có thể xếp chồng khít hai hình *b*) và *c*) với nhau, hay úp khít hai hình *a*) và *b*) (cũng như hai hình *a*) và *c*)) vào nhau. Đối tượng toán học nào cho phép ta diễn đạt hai hình bằng nhau? Ta hãy cùng tìm hiểu trong bài học này.



Hình 1.33. Cầu Vàng, Đà Nẵng

HĐ. Các phép tịnh tiến, phép đối xứng trục, phép quay cùng có tính chất nào trong các tính chất sau?

a. Biến một vectơ thành vectơ bằng nó.

b. Biến một đường tròn thành một đường tròn cùng tâm.

c. Biến một đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó.

d. Biến một đường thẳng thành đường thẳng song song với nó.

Phép biến hình *f* được gọi là **phép dời hình** nếu nó bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Chú ý

- Ta có thể chứng minh được rằng, phép dời hình biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó; biến tam giác thành tam giác bằng nó; biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính, có tâm là ảnh của tâm; biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự của chúng; biến đường thẳng thành đường thẳng.
- Hai hình $\mathscr{H}$ và $\mathscr{H}'$ được gọi là bằng nhau, nếu có phép dời hình biến hình $\mathscr{H}$ thành $\mathscr{H}'$.
- Phép tịnh tiến, phép đối xứng trục, phép quay, phép đối xứng tâm đều bảo toàn khoảng cách nên chúng là các phép dời hình.

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, gọi f là phép biến hình biến mỗi điểm có toạ độ $(x; y)$ thành điểm có toạ độ $(-x; y+1)$.

a) Chứng minh rằng f là một phép dời hình.

b) Chứng minh rằng với mọi điểm M, nếu f biến M thành M' thì M khác M'.

c) f có là phép nào trong các phép đối xứng trục, phép quay, phép tịnh tiến hay không?

Giải

a) Hai điểm bất kì $M(x; y)$, $N(x'; y')$ có ảnh qua f tương ứng là $M'(-x; y+1), N'(-x'; y'+1)$. Khi đó

$$M'N' = \sqrt{(-x'-(-x))^2 + ((y'+1)-(y+1))^2} = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2} = MN.$$

Do đó, f là một phép dời hình.

b) Phép dời hình f biến điểm $M(x; y)$ thành điểm có toạ độ $M'(-x; y+1)$. Do $y \neq y+1$ nên M khác M'.

c) Vì phép đối xứng trục biến mỗi điểm trên trục đối xứng thành chính nó và phép quay biến tâm quay thành chính nó, nên từ b) ta có f không thể là phép đối xứng trục hay là phép quay.

Các điểm $O(0; 0), A(1; 0)$ tương ứng có ảnh là $O'(0; 1), A'(-1; 1)$.

Ta có $\overrightarrow{OO'} = (0; 1)$, $\overrightarrow{AA'} = (-2; 1)$. Do $\overrightarrow{OO'} \neq \overrightarrow{AA'}$ nên f không thể là phép tịnh tiến.

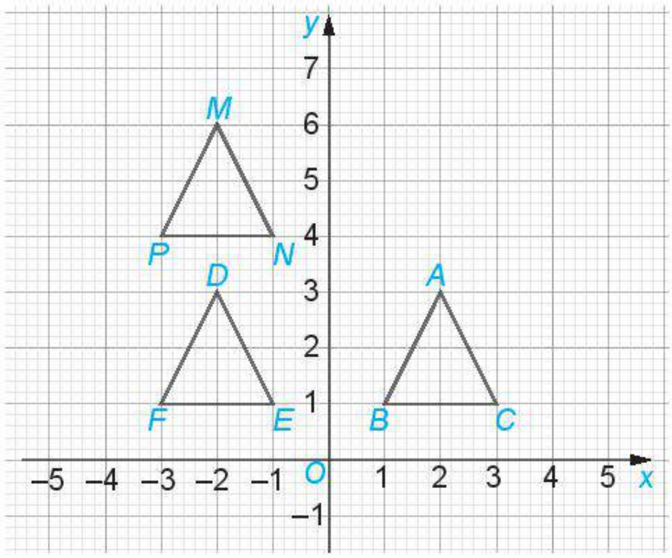
Vậy mặc dù f là một phép dời hình, nhưng nó không phải là phép tịnh tiến, phép đối xứng trục, phép quay.

Luyện tập. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy ở Hình 1.34, gọi f là phép biến hình biến mỗi điểm có toạ độ $(x; y)$ thành điểm có toạ độ $(-x; y+3)$. Trong các khẳng định sau, những khẳng định nào đúng.

a) f biến ΔABC thành ΔDEF.

b) f biến ΔDEF thành ΔMNP.

c) f biến ΔABC thành ΔMNP.

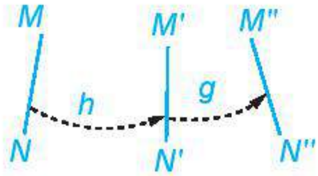


Hình 1.34

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

Chú ý

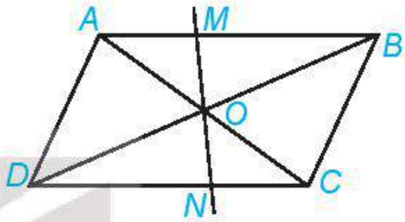
- Phép biến hình *f* trong Luyện tập trên có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng trục *Oy* và phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = (0;3)$.
- Thực hiện liên tiếp hai phép dời hình *h* và *g* (*h* trước, *g* sau) ta cũng được một phép dời hình, tức là, nếu *h* biến mỗi điểm *M* thành điểm *M'*, *g* biến điểm *M'* thành *M''*, thì phép biến hình biến mỗi điểm *M* thành điểm *M''* cũng là một phép dời hình (H.1.35).



Hình 1.35

Ví dụ 2. Cho hình bình hành *ABCD* có hai đường chéo cắt nhau tại *O*. Một đường thẳng đi qua O (khác đường chéo) cắt các cạnh *AB*, *CD* tương ứng tại *M*, *N* (H.1.36). Chứng minh rằng hai tứ giác *AMND* và *CNMB* bằng nhau.

Giải



Hình 1.36

Ta có *O* là trung điểm của các đường chéo *AC* và *BD*.

Ta có $\widehat{MAO} = \widehat{OCN}$, $AO = CO$, $\widehat{AOM} = \widehat{CON}$.

Do đó $\Delta\, OAM = \Delta\, OCN$, suy ra $OM = ON$.

Phép đối xứng tâm *O* biến các điểm *A, M, N, D* tương ứng thành các điểm *C, N, M, B,* do đó biến tứ giác *AMND* thành tứ giác *CNMB*. Vậy hai tứ giác *AMND* và *CNMB* bằng nhau.

Vận dụng. Trong tình huống mở đầu, bằng quan sát (H.1.33), hãy chỉ ra phép dời hình:

a) Biến Hình *a)* thành Hình *b)*.

b) Biến Hình *b)* thành Hình *c)*.

c) Biến Hình *a)* thành Hình *c)*.

d) Biến Hình *c)* thành Hình *a)*.

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

BÀI TẬP

1.16. Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy*, cho vectơ $\vec{u} = (0;1)$. Những khẳng định nào trong các khẳng định sau là đúng?

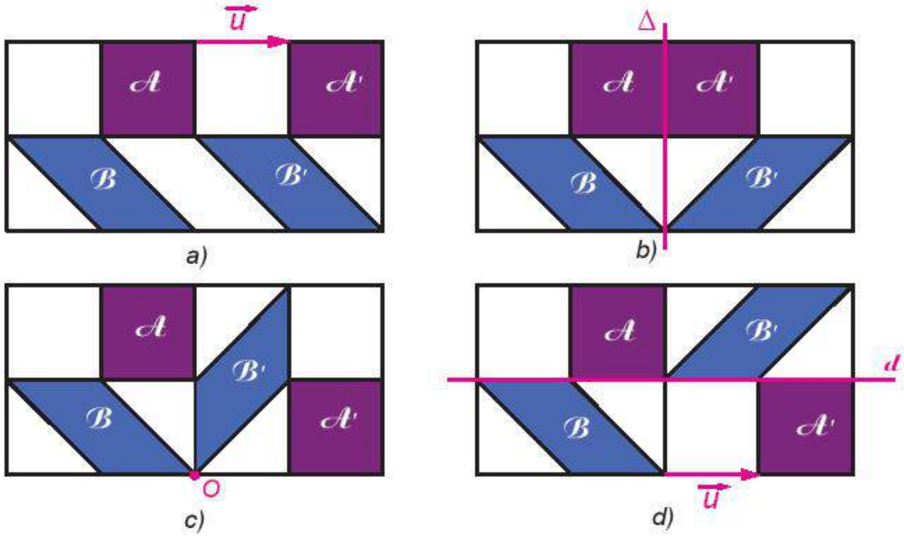
a) Phép đối xứng trục *Oy* biến mỗi điểm $M(x;\, y)$ thành điểm $M'(-x;\, y)$.

b) Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}$ biến điểm $M'(-x;\, y)$ thành điểm $M''(-x;\, y+1)$.

c) Thực hiện liên tiếp hai phép dời hình $Đ_{Oy}$ và $T_{\vec{u}}$ ($Đ_{Oy}$ trước, $T_{\vec{u}}$ sau) ta được phép dời hình biến mỗi điểm $M(x;\, y)$ thành điểm $M''(-x;\, y+1)$.

d) Phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép dời hình $Đ_{Oy}$ và $T_{\vec{u}}$ biến điểm $A(1;\, 2)$ thành điểm $A''(-1;\, 1)$.

1.17. Bằng quan sát, hãy chỉ ra trong mỗi hình trong Hình 1.37 một phép dời hình biến hình vuông $\mathscr{A}$ thành hình vuông $\mathscr{A}'$, đồng thời biến hình bình hành $\mathscr{B}$ thành hình bình hành $\mathscr{B}'$.



Hình 1.37

1.18. Cho một mảnh giấy hình thang cân *ABCD* (*AB // CD*). Hãy chỉ ra một cách cắt mảnh giấy đó thành hai mảnh giấy bằng nhau.

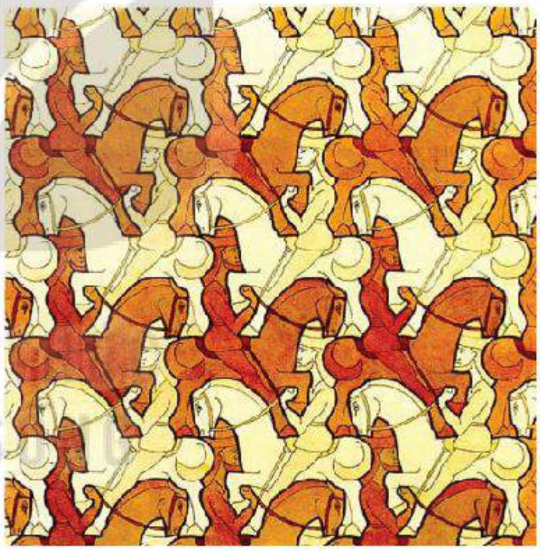
1.19 Hình 1.38 được vẽ dựa theo bức tranh *Kị binh* (horsmen) của Escher, gồm các hình bằng nhau mô tả các kị binh trên ngựa.

Bằng quan sát, hãy chỉ ra những khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

a) Có phép tịnh tiến biến mỗi chiến binh thành một chiến binh cùng màu.

b) Có phép đối xứng trục biến mỗi chiến binh thành một chiến binh khác màu.

c) Có phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp một phép đối xứng trục và một phép tịnh tiến biến mỗi kị binh thành một kị binh khác màu.



Hình 1.38

Em có biết?

Tại các quảng trường, con phố du lịch của thành phố Lisbon (Bồ Đào Nha) hay lâu đài Alhambra (Tây Ban Nha), ta bắt gặp rất nhiều kiểu lát gạch, khảm trang trí nghệ thuật, trông đẹp mắt và thú vị.

Trong mỗi phép lát mặt phẳng (không bị giới hạn) bởi các viên

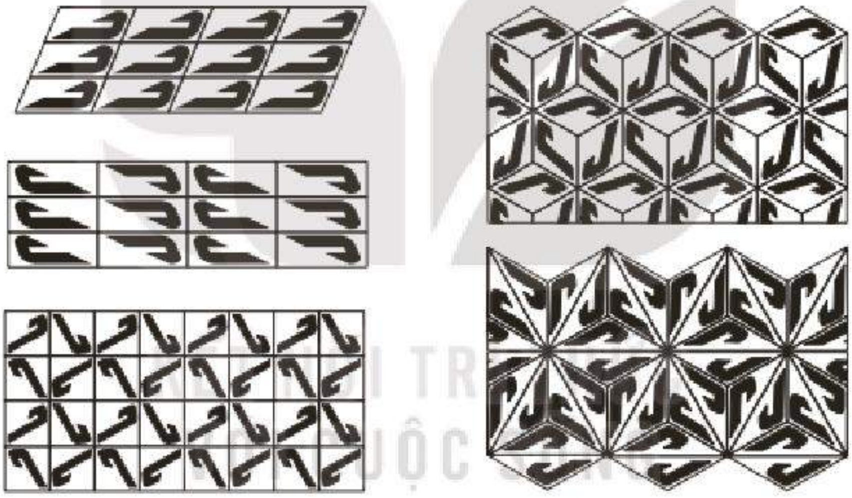
Hình 1.39. Quảng trường Rossio, Lisbon

gạch bằng nhau, ta có thể nhìn mỗi viên gạch là ảnh của viên gạch khác qua một phép dời hình (vì các viên gạch bằng nhau). Rõ ràng, người thợ sẽ có thể yên tâm tuần tự lát các viên gạch mà không sợ đến một lúc nào đó buộc phải cắt gạch nếu anh ta được cung cấp một "túi" các phép dời hình để sau khi đặt viên gạch thứ nhất, anh ta chỉ việc lần lượt đặt các viên tiếp theo là ảnh của viên đầu tiên qua các phép dời hình thuộc "túi" đó. Năm 1891, Fedorov đã chứng minh được rằng có tất cả 17 loại "túi" cho phép lát kín mặt phẳng mà không cần cắt gạch. Một điều khá thú vị là cả 17 cách lát mà toán học chứng minh được đều đã được con người thực hiện trước đó rải rác ở nhiều nơi trên thế giới (Theo *A.B.Sossinsky, GEOMETRIES*).

Để có thể thực hiện thành công việc lát mặt phẳng, rõ ràng người thợ đã "hành động địa phương" nhưng "tư duy toàn cục" (Khẩu hiệu "Think globally, act locally" được dùng trong nhiều lĩnh vực như môi trường, quy hoạch, giáo dục,..).

Các phép dời hình trong mỗi việc lát còn mang đến cho người ngắm cảm hứng khám phá và tạo nên sự chuyển động cho hình ảnh tổng thể.

Nếu yêu cầu "túi" chỉ gồm phép tịnh tiến và phép quay thì có đúng 5 loại "túi" đảm bảo cho việc lát, ứng với 5 cách lát bên.



Hình 1.40

Bài 6

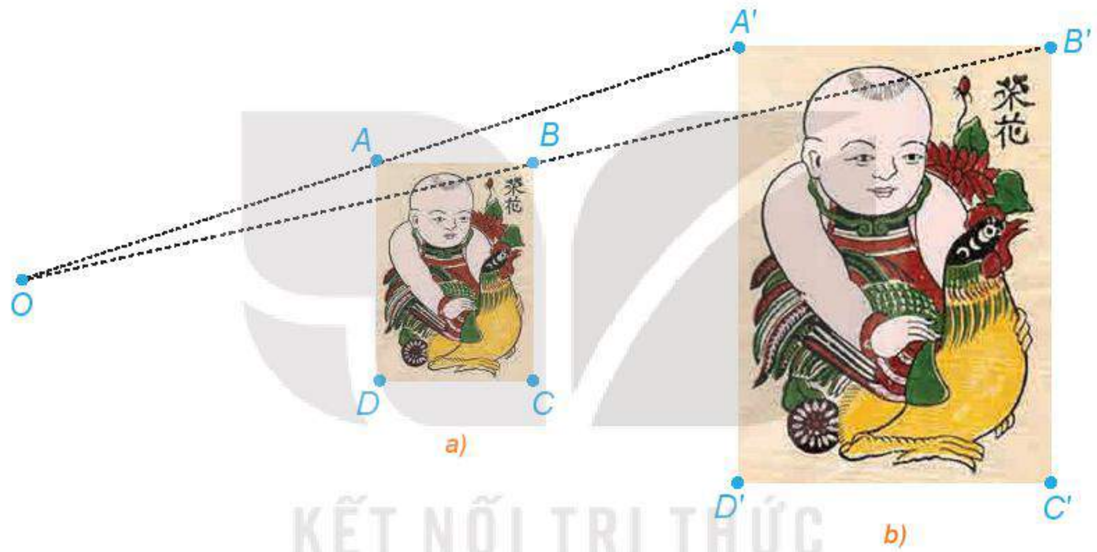
PHÉP VỊ TỰ

THUẬT NGỮ

- Phép vị tự
- Tâm vị tự
- Tỉ số của phép vị tự.

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết khái niệm phép vị tự.
- Nhận biết tính chất của phép vị tự.
- Xác định ảnh của điểm, đoạn thẳng, tam giác, đường tròn qua phép vị tự.



Hình 1.41. Em bé ôm chú gà (Tranh Đông Hồ)

Hai bức tranh ở Hình 1.41 có hình dạng giống nhau nhưng khác nhau về kích thước, nên không có phép dời hình biến bức tranh này bức tranh kia. Tuy vậy, ta sẽ biết bức tranh này như là ảnh của bức tranh kia qua một phép vị tự – đối tượng mà ta sẽ học trong bài này.

1. PHÉP VỊ TỰ

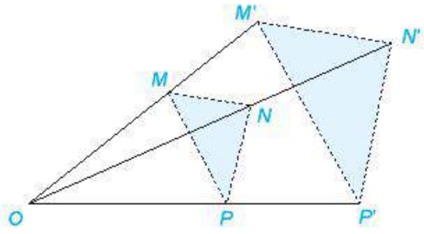
HĐ1. Trong hai bức tranh ở Hình 1.41, các hình chữ nhật *ABCD*, *A'B'C'D'* có các cạnh tương ứng song song, bức tranh lớn có kích thước gấp đôi bức tranh nhỏ.

a) Giải thích vì sao các đường thẳng *AA'*, *BB'*, *CC'*, *DD'* cùng đi qua một điểm *O*.

b) Hãy tính các tỉ số $\frac{OA}{OA'}, \frac{OB}{OB'}, \frac{OC}{OC'}, \frac{OD}{OD'}$.

c) Dùng thước thẳng nối hai điểm tương ứng nào đó trên hai bức tranh (chẳng hạn, đầu mỏ trên của chú gà ở hai bức tranh). Đường thẳng đó có đi qua *O* hay không?

Cho điểm O và số thực $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm O, tỉ số k, kí hiệu là $V_{(O,k)}$. Điểm O gọi là tâm vị tự, k gọi là tỉ số vị tự.



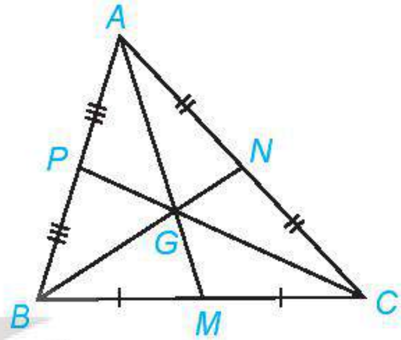
Hình 1.42

? Phép vị tự $V_{(O,k)}$ biến điểm O thành điểm nào? Nếu phép vị tự $V_{(O,k)}$ biến điểm M thành điểm M' thì phép vị tự $V_{\left(O, \frac{1}{k}\right)}$ biến điểm M' thành điểm nào?

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có ba đường trung tuyến AM, BN, CP và trọng tâm G.

a) Tìm ảnh của các điểm A, N, P qua phép vị tự $V_{(A,2)}$.

b) Tìm ảnh của các điểm A, B, C qua phép vị tự $V_{\left(G, -\frac{1}{2}\right)}$.



Hình 1.43

Giải

a) Phép vị tự $V_{(A,2)}$ biến điểm A thành điểm A. Do $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AP}$ nên phép vị tự $V_{(A,2)}$ biến các điểm N, P tương ứng thành các điểm C, B.

Vậy ảnh của các điểm A, N, P qua phép vị tự $V_{(A,2)}$ tương ứng là A, C, B.

b) Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{GM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC}$. Do đó, ảnh của các điểm A, B, C qua phép vị tự $V_{\left(G, -\frac{1}{2}\right)}$ tương ứng là M, N, P.

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

Luyện tập 1. Chứng minh rằng, phép vị tự $V_{(O,1)}$ là phép đồng nhất, phép vị tự $V_{(O,-1)}$ là phép đối xứng tâm O.

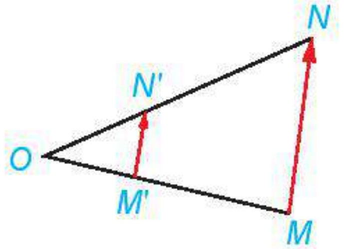
Vận dụng 1. Quan sát hai bức tranh chú bé ôm gà ở phần mở đầu bài học và chỉ ra phép vị tự biến bức tranh nhỏ thành bức tranh lớn và phép vị tự biến bức tranh lớn thành bức tranh nhỏ.

2. TÍNH CHẤT

HĐ2. Cho phép vị tự tâm O, tỉ số k biến điểm M thành điểm M', điểm N thành điểm N'.

a) Biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{OM'}$, $\overrightarrow{ON'}$ tương ứng theo các vectơ $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$.

b) Giải thích vì sao $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

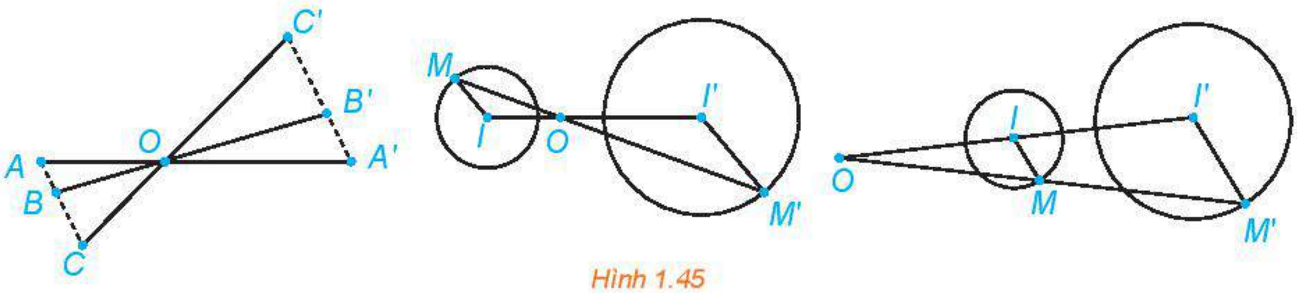


Hình 1.44

Nếu một phép vị tự tâm O, tỉ số k biến điểm M thành điểm M', điểm N thành điểm N' thì $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ (và do đó, $M'N' = |k|MN$).

Chú ý. Từ tính chất trên, người ta chứng minh được rằng, phép vị tự tâm O, tỉ số k:

- Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa ba điểm đó;
- Biến đoạn thẳng (độ dài a) thành đoạn thẳng (độ dài $|k|a$);
- Biến đường tròn (bán kính R) thành đường tròn (bán kính $|k|R$) với tâm là ảnh của tâm;
- Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó (tỉ số đồng dạng là $|k|$);
- Biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đó.



Hình 1.45

Ví dụ 2. Một phép vị tự tâm O, tỉ số k biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$. Tính tỉ số diện tích hai tam giác $A'B'C'$ và ABC.

Giải

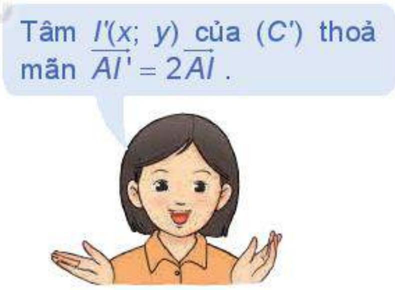
Phép vị tự tỉ số k biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$ nên tam giác $A'B'C'$ đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số $|k|$ (để ý rằng $B'C' = |k|BC$, $C'A' = |k|CA$, $A'B' = |k|AB$). Do đó, $\dfrac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = |k|^2 = k^2$.

Luyện tập 2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$.

a) Tìm tâm I và bán kính R của đường tròn (C).

b) Tìm tâm I' và bán kính R' của đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép vị tự tâm $A(3; 5)$, tỉ số 2.

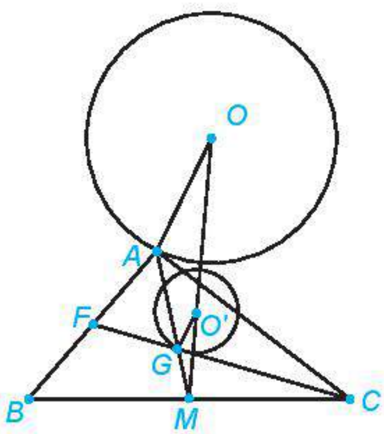
c) Viết phương trình của (C').



Ví dụ 3. Cho đường tròn (O, R) và hai điểm phân biệt B, C sao cho đường thẳng BC và (O, R) không có điểm chung. Cho điểm A thay đổi trên đường tròn (O, R). Chứng minh rằng trọng tâm G của tam giác ABC thuộc một đường tròn cố định.

Giải (H.1.46)

Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{MG} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{MA}$. Do đó, phép vị tự tâm M, tỉ số $\dfrac{1}{3}$ biến điểm A thành điểm G. Mặt khác, A thuộc đường tròn (O, R) nên G thuộc đường tròn (O', R') cố định là ảnh của đường tròn (O, R) qua phép vị tự $V_{\left(M, \frac{1}{3}\right)}$. Ở đó, $R' = \dfrac{1}{3}R$ và O' là ảnh của O qua $V_{\left(M, \frac{1}{3}\right)}$ nên được xác định bởi $\overrightarrow{MO'} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{MO}$.



Hình 1.46

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

Vận dụng 2. Quan sát Hình 1.47 và cho biết hình nào trong hai hình nhỏ không phải là ảnh của hình lớn qua một phép vị tự. Nêu lí do cho sự lựa chọn đó.

a)

b)

c)

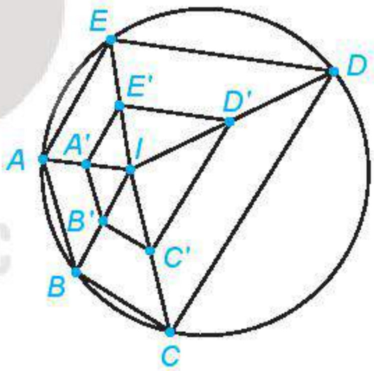
Hình 1.47

BÀI TẬP

1.20. Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy AB và CD, $CD = 2AB$. Gọi O là giao của hai cạnh bên và I là giao của hai đường chéo. Tìm ảnh của đoạn thẳng AB qua các phép vị tự $V_{(O,\,2)}$, $V_{(I,\,-2)}$.

1.21. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho $A(1;\,2)$, $B(3;\,6)$. Viết phương trình đường tròn (C) là ảnh của đường tròn đường kính AB qua phép vị tự $V_{(O,\,3)}$.

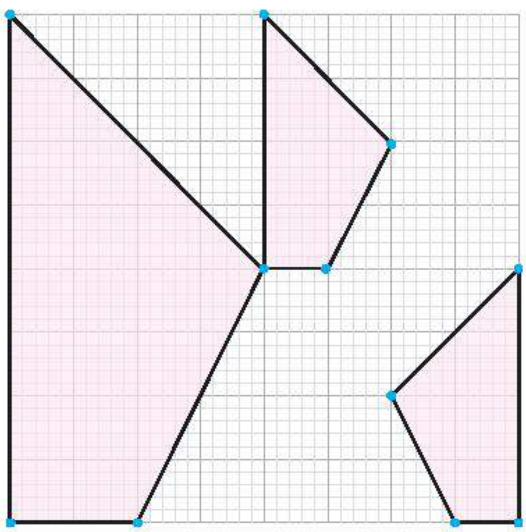
1.22. Ở Hình 1.48, A', B', C', D', E' tương ứng là trung điểm của các đoạn thẳng IA, IB, IC, ID, IE. Hỏi năm điểm đó có thuộc một đường tròn hay không? Vì sao?



Hình 1.48

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

1.23. Quan sát ba hình được tô màu ở Hình 1.49, hình nhỏ nào là ảnh của hình lớn qua một phép vị tự?



Hình 1.49

Bài 7 PHÉP ĐỒNG DẠNG

THUẬT NGỮ

- Phép đồng dạng
- Tỉ số đồng dạng
- Hai hình đồng dạng.

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết khái niệm phép đồng dạng.
- Vận dụng được phép đồng dạng trong thực tiễn.

Phép dời hình cho phép ta thể hiện mối quan hệ giống nhau cả về hình dạng và kích thước giữa các hình. Đối với các hình chỉ giống nhau về hình dạng còn kích thước có thể khác nhau thì sao? Đối tượng toán học nào cho phép ta thể hiện điều đó?

Hình 1.50

HĐ. Hai tấm ảnh Dinh Thống Nhất ở hình trên giống nhau về hình dạng, chỉ khác nhau về kích thước.

a) Hãy đo và cho biết chiều dài, chiều rộng của tấm ảnh lớn tương ứng gấp mấy lần chiều dài, chiều rộng của tấm ảnh nhỏ.

b) Nếu lấy hai vị trí A, B bất kì thuộc tấm ảnh nhỏ và các vị trí A', B' tương ứng với chúng trên tấm ảnh lớn thì khoảng cách giữa A' và B' gấp mấy lần khoảng cách giữa A và B? Hãy lấy ví dụ cụ thể các vị trí và đo để kiểm tra câu trả lời của bạn.

Phép biến hình f được gọi là **phép đồng dạng** tỉ số k ($k > 0$) nếu với hai điểm bất kì M, N và hai ảnh M', N' tương ứng của chúng, ta có $M'N' = kMN$.

? Phép dời hình và phép vị tự tỉ số t có phải là các phép đồng dạng hay không? Nếu có thì có tỉ số đồng dạng là bao nhiêu?

Ví dụ 1. Chứng minh rằng phép biến hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp một phép dời hình f và một phép vị tự $V_{(O,k)}$ là một phép đồng dạng với tỉ số $|k|$.

Giải

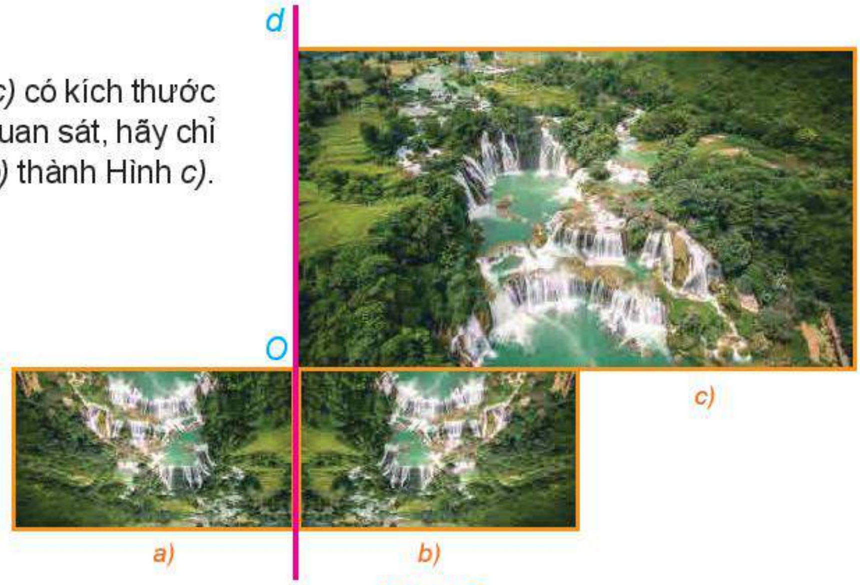
Với hai điểm bất kì M, N, giả sử phép dời hình f biến M, N tương ứng thành M', N' và $V_{(O,k)}$ biến M', N' tương ứng thành M'', N''. Vì f là phép dời hình nên $MN = M'N'$. Mặt khác

$$M''N'' = |k|M'N'.$$

Do đó $M''N'' = |k|MN$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Luyện tập 1. Chứng minh rằng phép biến hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đồng dạng f với tỉ số k_1 và phép đồng dạng g với tỉ số k_2 là một phép đồng dạng với tỉ số $k_1 \cdot k_2$.

Ví dụ 2. Trong Hình 1.51, Hình *c)* có kích thước gấp đôi các Hình *a)*, *b)*. Bằng quan sát, hãy chỉ ra phép đồng dạng biến Hình *b)* thành Hình *c)*.



Hình 1.51

Giải

Phép đối xứng qua trục d biến Hình *b)* thành Hình *a)*. Phép vị tự tâm O, tỉ số -2 biến Hình *a)* thành Hình *c)*. Như vậy, phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng trục d và phép vị tự $V_{(O;\,-2)}$ biến Hình *b)* thành Hình *c)*.

Chú ý. Với hai hình $\mathscr{H}$ và $\mathscr{H}'$, nếu có phép đồng dạng biến $\mathscr{H}$ thành $\mathscr{H}'$ thì cũng có phép đồng dạng biến $\mathscr{H}'$ thành $\mathscr{H}$ và ta nói $\mathscr{H}$ và $\mathscr{H}'$ đồng dạng với nhau.

Luyện tập 2. Cho đường thẳng d và hai điểm phân biệt A, B. Điểm M thay đổi thay đổi trên đường thẳng d. Gọi N là điểm đối xứng của M qua đường thẳng AB và P là trung điểm của đoạn thẳng BN. Chứng minh rằng P thuộc một đường thẳng cố định.

Vận dụng. Trong hai hình Dinh Thống Nhất ở Hình 1.50, hãy chỉ ra phép đồng dạng biến hình nhỏ thành hình lớn.

BÀI TẬP

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

1.24. Một phép đồng dạng biến ba đỉnh A, B, C của tam giác ABC tương ứng thành A', B', C'. Chứng minh rằng

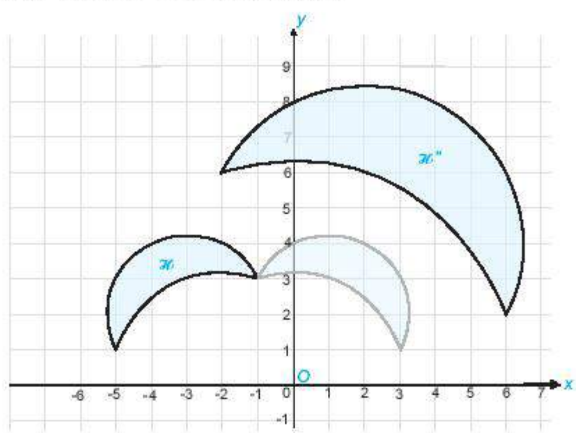
$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

1.25. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho phép biến hình f biến mỗi điểm $M(x;\, y)$ thành điểm $M'(3x;\, -3y)$.

a) Tìm ảnh của các điểm $O(0;\, 0)$, $N(2;\, 1)$.

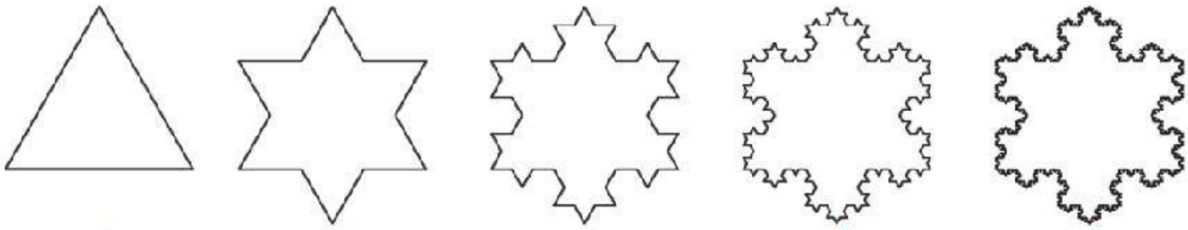
b) Chứng minh rằng f là một phép đồng dạng. Tìm tỉ số đồng dạng.

1.26. Hai hình $\mathscr{H}$ và $\mathscr{H}''$ trong Hình 1.52 được vẽ trên mặt phẳng toạ độ Oxy. Bằng quan sát, hãy chỉ ra một phép đối xứng trục f và một phép vị tự g sao cho phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp hai phép f và g (thực hiện f trước, g sau) biến hình $\mathscr{H}$ thành hình $\mathscr{H}''$.



Hình 1.52

Em có biết?



Hình 1.53

Ta bắt đầu với một hình tam giác đều (Hình *a)*). Chia mỗi cạnh của tam giác đó thành 3 đoạn thẳng có độ dài bằng nhau và vẽ một tam giác đều nhận đoạn ở giữa làm cạnh đồng thời bỏ đi đoạn ở giữa đó, ta được Hình *b)*. Tiếp tục chia mỗi cạnh của Hình *b)* thành 3 đoạn thẳng có độ dài bằng nhau và vẽ một tam tam giác đều nhận đoạn ở giữa làm cạnh đồng thời bỏ đi đoạn ở giữa đó, ta được Hình *c)*. Lặp lại quá trình trên, từ Hình *c)* ta tạo nên Hình *d)*, từ Hình *d)*, ta tạo nên Hình *e)*, và cứ thế, ta sẽ được một dãy các hình, được gọi là dãy hình bông tuyết Koch (được đặt theo tên nhà toán học người Thuỵ Điển, Helge von Koch). Ta hoàn toàn có thể chứng minh được rằng, nếu tam giác đều ban đầu có cạnh là a thì bông tuyết Koch thứ n có chu vi là $\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \cdot 3a$ và có diện tích bằng $\left(8-3\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right) \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{20}$.

"Giới hạn" của dãy bông tuyết trên (khi n tiến ra vô tận) được gọi là bông tuyết Knock. Như vậy, bông tuyết Koch có chu vi bằng vô tận $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \cdot 3a = \infty$, nhưng có diện tích hữu hạn và bằng $\frac{8}{5}$ lần diện tích tam giác đều ban đầu $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(8-3\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right) \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{20} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{5}\right)$.

Mặc dù trong quá trình trên chúng ta chỉ tuân theo một quy tắc và lặp đi lặp lại nhiều lần, nhưng sau một số bước ta sẽ nhận được những hình trông khác xa so với hình ban đầu. Hình được tạo thành từ một hình cơ bản sau một quá trình lặp đi lặp lại một quy tắc được gọi là hình fractal. Bằng máy tính người ta dễ dàng tạo nên các hình fractal. Các cấu trúc fractal cũng phổ biến trong tự nhiên. Điều đáng lưu ý ở đây là mặc dù cấu trúc ban đầu có thể rất đơn giản nhưng sau một số bước đã tạo nên những cấu trúc phức tạp đến đáng kinh ngạc. Mặc khác, vì theo một quy tắc và lặp đi lặp lại nhiều lần, nên cấu trúc fractal cho ta hình ảnh mang tính tự đồng dạng như cây đồng dạng với cành cây.

Hình 1.54. Một số cấu trúc fractal

BÀI TẬP CUỐI CHUYÊN ĐỀ 1

1.27. Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy*, cho đường thẳng $\Delta: 2x - y - 1 = 0$ và hai điểm $A(-1; 2)$, $B(-3; 4)$.

a) Tìm toạ độ điểm A' là ảnh của điểm A qua phép đối xứng trục Δ.

b) Xác định điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

1.28. Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy*, cho đường thẳng $d: 2x - y + 5 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của đường thẳng d qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u}(-3; 4)$.

1.29. Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy*, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$. Viết phương trình của đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép đối xứng tâm $A(3; -3)$.

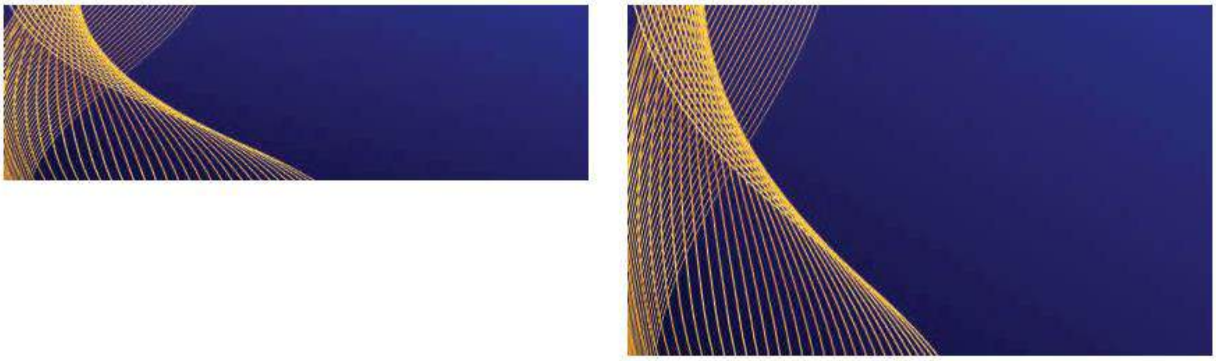
1.30. Trong mặt phẳng toạ độ *Oxy*, cho đường tròn (C): $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$. Phép vị tự tâm $O(0; 0)$ với tỉ số $k = -2$ biến đường tròn (C) thành đường tròn (C'). Viết phương trình đường tròn (C').

1.31. Cho đường thẳng d và hai điểm A, B cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ d. Hai điểm E, F thay đổi trên d sao cho $\overrightarrow{EF}$ không đổi. Xác định vị trí của hai điểm E, F để $AE + BF$ nhỏ nhất.

1.32. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Các đỉnh B, C cố định còn đỉnh A thay đổi trên đường tròn đó. Vẽ hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng điểm D luôn thuộc một đường tròn cố định.

1.33. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB và điểm M trên nửa đường tròn đó. Dựng về phía ngoài của tam giác ABM tam giác AMN vuông cân tại M. Chứng minh rằng khi M thay đổi trên nửa đường tròn thì điểm N luôn thuộc một nửa đường tròn cố định.

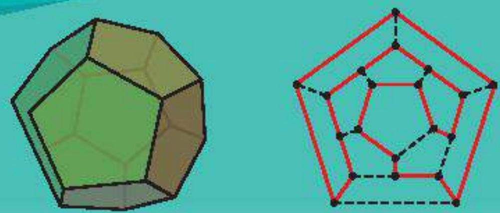
1.34. Bằng quan sát và đo đạc, hãy cho biết hai hình sau (H.1.55) có đồng dạng với nhau hay không.



Hình 1.55

CHUYÊN ĐỀ 2

LÀM QUEN VỚI MỘT VÀI KHÁI NIỆM CỦA LÍ THUYẾT ĐỒ THỊ



Đường đi Hamilton trên khối thập nhị diện đều (khối 12 mặt đều)

Chuyên đề này giới thiệu một vài khái niệm cơ bản và kết quả ban đầu của lí thuyết đồ thị, một nhánh của toán học rời rạc có nhiều ứng dụng trong thực tế, và áp dụng giải quyết bài toán tìm đường đi tối ưu trong một vài trường hợp đơn giản.

Bài 8 MỘT VÀI KHÁI NIỆM CƠ BẢN

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

THUẬT NGỮ

- Đồ thị
- Đỉnh, cạnh
- Đường đi, chu trình
- Bậc của đỉnh

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

Nhận biết một số khái niệm cơ bản: đồ thị, đỉnh, cạnh, đường đi, chu trình, bậc của đỉnh.

Trước khi vào một hội nghị, các đại biểu bắt tay nhau (hai người bắt tay nhau nhiều nhất 1 lần). Có một đại biểu không bắt tay ai hết và thấy rằng có 4 người bắt tay 4 lần, 5 người bắt tay 5 lần và 6 người bắt tay 6 lần. Nếu hội nghị có đúng 16 đại biểu thì ông ta đã đếm nhầm. Vì sao có thể kết luận như vậy?

Những kiến thức ban đầu về lí thuyết đồ thị trong bài học này sẽ giúp chúng ta tìm được câu trả lời cho tình huống trên.

1. ĐỒ THỊ

a) Khái niệm đồ thị

HĐ1. Nhận biết khái niệm đồ thị

Có bốn bạn học sinh khối 11 là An, Bình, Cường và Dung, trong đó: An là bạn của Bình và Cường, nhưng không là bạn của Dung; Dung là bạn của Cường, nhưng không là bạn của Bình; Bình là bạn của Cường.

a) Hãy biểu diễn mỗi bạn An, Bình, Cường, Dung bằng một điểm trên mặt phẳng và dùng chữ cái đầu (in hoa) trong tên của họ để đặt tên cho các điểm này.

b) Nếu hai người là bạn của nhau, hãy nối các điểm biểu diễn tương ứng bằng một đoạn thẳng (hay đoạn đường cong).

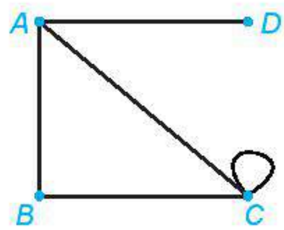
c) Từ hình vẽ thu được ở HĐ1b, hãy cho biết: ai có nhiều bạn nhất và ai có ít bạn nhất?

Hình vẽ thu được ở HĐ1b (diễn tả mối quan hệ bạn bè giữa bốn học sinh đã cho) gọi là một *đồ thị*. Tổng quát ta có định nghĩa sau:

> Một đồ thị là một tập hợp hữu hạn các điểm (gọi là các đỉnh của đồ thị) cùng với tập hợp các đoạn đường cong hay thẳng (gọi là cạnh của đồ thị) có đầu mút tại các đỉnh của đồ thị.

Chú ý. Theo định nghĩa của đồ thị, các cạnh của đồ thị thẳng hay cong, dài hay ngắn, các đỉnh ở vị trí nào đều không quan trọng, mà bản chất là *đồ thị có bao nhiêu đỉnh, bao nhiêu cạnh và đỉnh nào được nối với đỉnh nào.*

Ta thường kí hiệu $V(G)$ là tập hợp các đỉnh và $E(G)$ là tập hợp các cạnh của đồ thị G, và viết $G = (V, E)$. Cạnh nối hai đỉnh A và B thường được kí hiệu là AB hoặc BA, và khi đó A và B gọi là hai đỉnh *kề nhau*. Nếu hai đầu mút của cạnh trùng nhau tại đỉnh C thì ta gọi cạnh ấy là một *khuyên*, kí hiệu là CC.



Hình 2.1

Hình 2.1 cho ta một đồ thị có 4 đỉnh là A, B, C, D và 5 cạnh là AB, AC, AD, BC và CC.

Ví dụ 1. Viết tập hợp các đỉnh và tập hợp các cạnh của đồ thị G trong Hình 2.2.

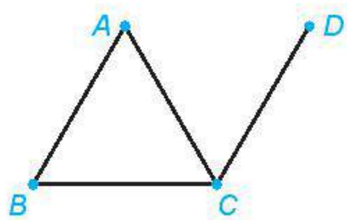
Giải

Tập hợp các đỉnh của đồ thị G là

$$V(G) = \{A, B, C, D\}.$$

Tập hợp các cạnh của đồ thị G là

$$E(G) = \{AB, AC, BC, CD\}.$$



Hình 2.2

Luyện tập 1. Bảng F của giải vô địch bóng đá thế giới World Cup 2018 gồm bốn đội: Đức, Hàn Quốc, Mexico và Thuỵ Điển. Biểu diễn các đội này bằng các điểm phân biệt kí hiệu lần lượt là *D*, *H*, *M*, *T* (vẽ sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng để dễ quan sát) và nếu hai đội nào đấu với nhau thì ta nối hai điểm tương ứng bằng một đoạn thẳng, ta sẽ được một đồ thị *G*.

Viết tập hợp các đỉnh và tập hợp các cạnh của đồ thị *G*.

b) Đơn đồ thị và đa đồ thị

HĐ2. Nhận biết khái niệm đơn đồ thị

Xét đồ thị cho trong Hình 2.2.

a) Đồ thị trên có khuyên không?

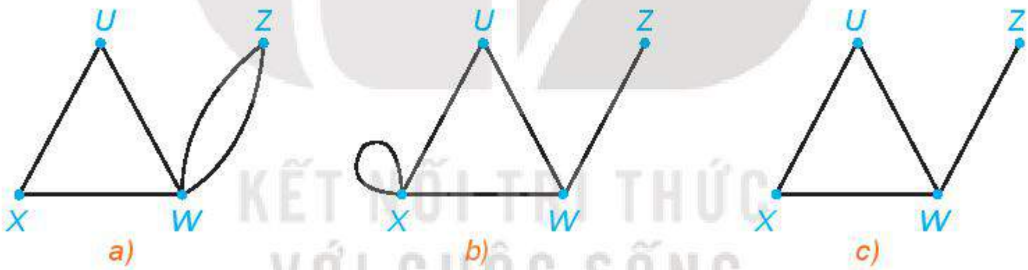
b) Có hai đỉnh nào của đồ thị được nối với nhau bằng nhiều hơn một cạnh không?

Một đồ thị không có khuyên, trong đó hai đỉnh được nối bằng nhiều nhất một cạnh (không có hai cạnh nào cùng nối một cặp đỉnh) gọi là một đơn đồ thị.

Một đồ thị không có khuyên, trong đó hai đỉnh có thể nối bằng nhiều cạnh, gọi là một đa đồ thị.

Chú ý. Trong cuốn sách này, khi chỉ nói từ "đồ thị" thì ta hiểu là đơn đồ thị. Khi nào cần xét đa đồ thị thì ta sẽ nói rõ.

Ví dụ 2. Hình nào sau đây biểu diễn một đơn đồ thị? Một đa đồ thị?



Hình 2.3

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

Giải

Hình a) không có khuyên và có hai cạnh nối hai đỉnh *Z* và *W*, nên là một đa đồ thị.

Hình b) có khuyên nên không phải là đơn đồ thị, cũng không phải là đa đồ thị.

Hình c) không có khuyên và hai đỉnh chỉ được nối bằng nhiều nhất một cạnh nên là một đơn đồ thị.

Luyện tập 2. Vẽ đồ thị *G* với các đỉnh và các cạnh như sau:

$$V(G) = \{U, W, X, Z\} \text{ và } E(G) = \{UW, WX, WZ, XZ\}.$$

G có phải là một đơn đồ thị không?

c) Đồ thị đầy đủ

HĐ3. Nhận biết đồ thị đầy đủ

Xét đồ thị nhận được trong Luyện tập 1. Có cặp đỉnh nào của đồ thị này mà không có cạnh nào nối chúng không?

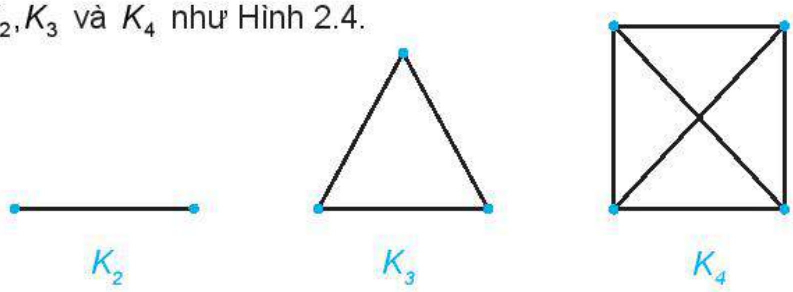
Một đồ thị là *đầy đủ* khi và chỉ khi mỗi cặp đỉnh của nó đều được nối bằng một cạnh.

Nhận xét. Một đồ thị đầy đủ là đồ thị mà mọi cặp đỉnh của nó đều là kề nhau. Một đồ thị đầy đủ hoàn toàn được xác định bởi số đỉnh của nó. Đồ thị đầy đủ có n đỉnh thường được kí hiệu là K_n.

Ví dụ 3. Vẽ các đồ thị đầy đủ K_2, K_3 và K_4.

Giải

Ta có các đồ thị K_2, K_3 và K_4 như Hình 2.4.



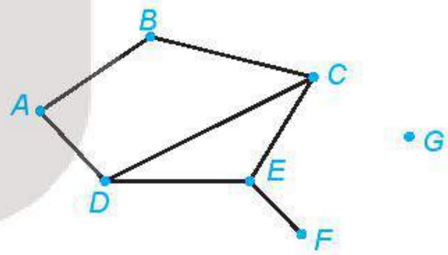
Hình 2.4

Luyện tập 3. Vẽ các đồ thị đầy đủ có 5 đỉnh, có 6 đỉnh.

2. BẬC CỦA ĐỈNH

HĐ4. Nhận biết bậc của đỉnh

Cho đồ thị như Hình 2.5. Tìm các đỉnh là đầu mút của: 0 cạnh; 1 cạnh; 2 cạnh; 3 cạnh.



Hình 2.5

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

Một đỉnh của đồ thị được gọi là đỉnh bậc n nếu nó là đầu mút của n cạnh.

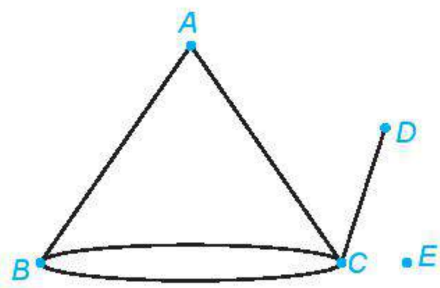
Chú ý. Đỉnh bậc 0 gọi là *đỉnh cô lập*. Đỉnh bậc 1 gọi là *đỉnh treo*.

Trong đồ thị ở Hình 2.5, D là đỉnh bậc 3, F là đỉnh treo, G là đỉnh cô lập.

Ví dụ 4. Xác định bậc của các đỉnh của đồ thị ở Hình 2.6

Giải

A là đỉnh bậc 2, B là đỉnh bậc 3, C là đỉnh bậc 4, D là đỉnh bậc 1, E là đỉnh bậc 0.



Hình 2.6

Ta có thể chứng minh định lí (gọi là *Định lí bắt tay*) sau đây.

Trong mọi đồ thị G, tổng tất cả các bậc của các đỉnh là một số chẵn và bằng hai lần tổng tất cả các cạnh của G.

Hệ quả. Số đỉnh bậc lẻ của mọi đồ thị là một số chẵn.

Ví dụ 5. Cho đồ thị G với 14 đỉnh và 25 cạnh. Biết rằng mỗi đỉnh của đồ thị G đều có bậc 3 hoặc bậc 5. Hỏi G có bao nhiêu đỉnh bậc 3?

Giải

Gọi x là số đỉnh bậc 3 của G. Khi đó số đỉnh bậc 5 của G là $14 - x$. Tổng tất cả các bậc của đỉnh là $3x + 5(14 - x)$.

Vì đồ thị có 25 cạnh nên ta có: $3x + 5(14 - x) = 2 \cdot 25 = 50 \Leftrightarrow 2x = 20 \Leftrightarrow x = 10$.

Vậy đồ thị G có 10 đỉnh bậc 3.

Ví dụ 6. Hãy giải bài toán trong *tình huống mở đầu*.

Giải

Ta vẽ một đồ thị với 16 đỉnh tương ứng với 16 đại biểu tham dự hội nghị. Nếu hai đại biểu nào bắt tay nhau thì ta nối hai đỉnh tương ứng bằng một cạnh.

Theo số liệu mà đại biểu đếm số bắt tay cung cấp, ta có một đồ thị với 16 đỉnh, trong đó có 1 đỉnh bậc 0, 4 đỉnh bậc 4, 5 đỉnh bậc 5 và 6 đỉnh bậc 6.

Ở đây số đỉnh bậc 5 là 5, là một số lẻ. Điều này mâu thuẫn với hệ quả của Định lí bắt tay.

Vậy đại biểu đó đã đếm sai.

Luyện tập 4. Chứng minh rằng không có đơn đồ thị với 12 đỉnh và 28 cạnh mà các đỉnh đều có bậc 3 hoặc 4.

3. ĐƯỜNG ĐI VÀ CHU TRÌNH

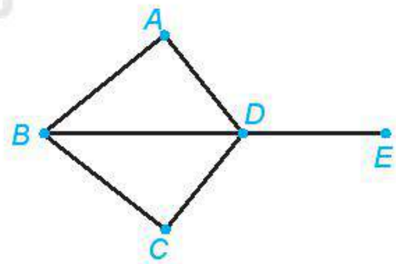
a) Khái niệm đường đi và chu trình

HĐ5. Nhận biết khái niệm đường đi và chu trình

Cho đồ thị như Hình 2.7. Bằng cách đi dọc theo các cạnh, với điều kiện không đi qua cạnh nào quá một lần (có thể có cạnh không cần đi qua), hãy chỉ ra các cách để:

a) Đi từ đỉnh A đến đỉnh E.

b) Đi từ đỉnh A và lại quay về đỉnh A.



Hình 2.7

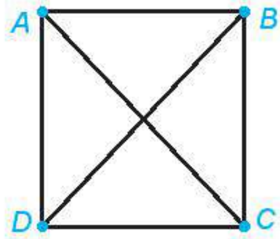
Trong một đồ thị G, một dãy cạnh nối tiếp (hai cạnh nối tiếp là hai cạnh có chung một đầu mút) AB, BC, CD, ..., MN, NP gọi là một **đường đi** nối A với P, kí hiệu là $ABCD...MNP$. Điểm A gọi là đầu đường, điểm P gọi là cuối đường.

Một đường đi khép kín (đầu đường trùng với cuối đường) gọi là một **chu trình**.

Một đường đi (chu trình) qua n cạnh gọi là một đường đi (chu trình) có độ dài n.

Một đường đi (hay chu trình) là *sơ cấp* nếu nó không đi qua đỉnh nào hai lần trở lên. Một đường đi (chu trình) là *đơn giản* nếu nó không đi qua cạnh nào hai lần trở lên.

Ví dụ 7. Cho đồ thị đầy đủ có 4 đỉnh như Hình 2.8. Tìm những chu trình sơ cấp xuất phát từ đỉnh A và có: độ dài 3; độ dài 4.



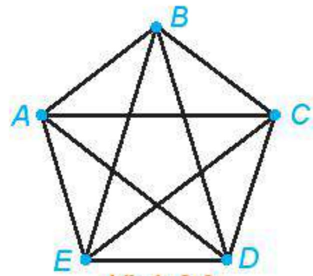
Hình 2.8

Giải

Những chu trình sơ cấp có độ dài 3 xuất phát từ đỉnh A là: $ABCA$, $ABDA$, $ACBA$, $ACDA$, $ADBA$, $ADCA$.

Những chu trình sơ cấp có độ dài 4 xuất phát từ đỉnh A là: $ABCDA$, $ABDCA$, $ACBDA$, $ACDBA$, $ADBCA$, $ADCBA$.

Luyện tập 5. Cho đồ thị đầy đủ có 5 đỉnh như Hình 2.9. Tìm những chu trình sơ cấp xuất phát từ đỉnh A và có: độ dài 4; độ dài 5.



Hình 2.9

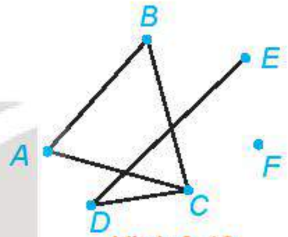
b) Tính liên thông của đồ thị

HĐ6. Nhận biết tính liên thông của đồ thị

Trong đồ thị ở Hình 2.10, hãy:

a) Tìm một đường đi từ đỉnh A đến đỉnh E.

b) Có tồn tại một đường đi từ đỉnh A đến đỉnh F hay không?



Hình 2.10

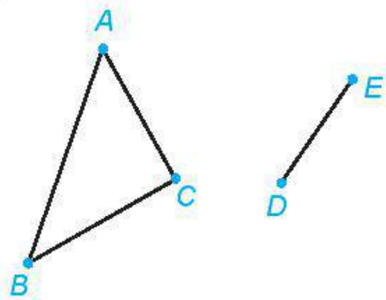
Hai đỉnh A và B của một đồ thị gọi là liên thông nếu có một đường đi nối A và B.

Một đồ thị G được gọi là liên thông nếu mọi cặp đỉnh của G là liên thông.

Một cạnh CD của đồ thị G gọi là một cầu nếu khi bỏ cạnh CD thì hai đỉnh C và D không còn liên thông nữa.

Mỗi đồ thị G không liên thông đều được chia thành một số đồ thị (gọi là đồ thị con của G) liên thông, rời nhau, mỗi đồ thị con đó gọi là một thành phần liên thông của G.

Ví dụ 8. Tìm các thành phần liên thông của đồ thị trong Hình 2.11.



Hình 2.11

Giải

Đồ thị ở Hình 2.11 có hai thành phần liên thông: một thành phần gồm 3 đỉnh A, B, C và các cạnh AB, AC, BC; một thành phần gồm hai đỉnh D, E và cạnh DE.

Người ta chứng minh được rằng:

Một đồ thị $2n$ đỉnh, mỗi đỉnh có bậc ít nhất bằng n, là đồ thị liên thông.

Ví dụ 9. Giả sử một lớp có 40 học sinh. Biết rằng mỗi em có số điện thoại của ít nhất là 20 bạn trong lớp và nếu bạn A có số điện thoại của bạn B thì bạn B cũng có số điện thoại của bạn A. Chứng minh rằng bất cứ hai em nào trong lớp cũng có số điện thoại của nhau.

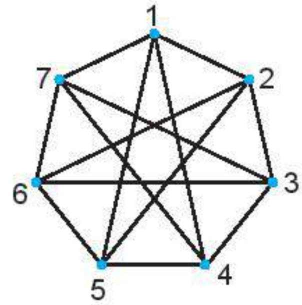
Giải

Ta đặt tương ứng mỗi em học sinh trong lớp với một đỉnh của đồ thị và hai đỉnh được gọi là liên thông nếu hai em có số điện thoại của nhau.

Bài toán trở thành: *Cho một đồ thị có 40 đỉnh. Biết mỗi đỉnh bất kì đều liên thông với ít nhất 20 đỉnh khác. Chứng minh rằng đồ thị là liên thông.*

Đồ thị này có 40 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc ít nhất là 20, do đó đồ thị là liên thông.

Vậy, bất cứ hai em học sinh nào trong lớp cũng có số điện thoại của nhau.



Hình 2.12

Luyện tập 6. Chứng minh đồ thị ở Hình 2.12 là liên thông. Hãy chỉ ra một đường đi nối đỉnh 1 và đỉnh 6.

BÀI TẬP

2.1. Vẽ hình biểu diễn của đồ thị G với tập đỉnh $V(G) = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ và tập cạnh

$$E(G) = \{12; 14; 23; 25; 34, 35\}.$$

Đồ thị G có phải là đơn đồ thị không? Có phải là đồ thị đầy đủ không?

2.2. Hãy vẽ một đồ thị có 4 đỉnh và:

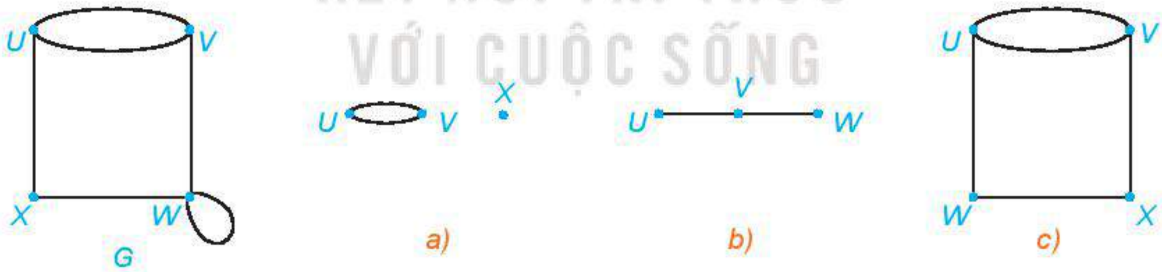
a) có đúng hai đỉnh cùng bậc và bậc là 1;

b) có đúng hai đỉnh cùng bậc và bậc là 2.

2.3. Một *đồ thị con* của đồ thị G là một đồ thị mà mọi đỉnh của nó đều là đỉnh của G và mọi cạnh của nó cũng là cạnh của G.

Những đồ thị nào trong các hình a), b), c) dưới đây là đồ thị con của đồ thị G?

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG



Hình 2.13

2.4. Chứng minh rằng một đồ thị đầy đủ có n đỉnh thì có $\dfrac{n(n-1)}{2}$ cạnh.

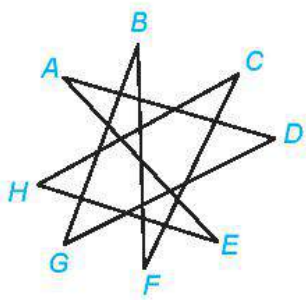
2.5. Chứng minh rằng không tồn tại đồ thị với các đỉnh có bậc là 2, 3, 3, 4, 4 và 5.

2.6. Cho đồ thị G như Hình 2.14.

a) Tìm một đường đi từ đỉnh A đến đỉnh B.

b) G có liên thông không?

c) Trong G có chu trình sơ cấp nào không?



Hình 2.14

Bài 9 ĐƯỜNG ĐI EULER VÀ ĐƯỜNG ĐI HAMILTON

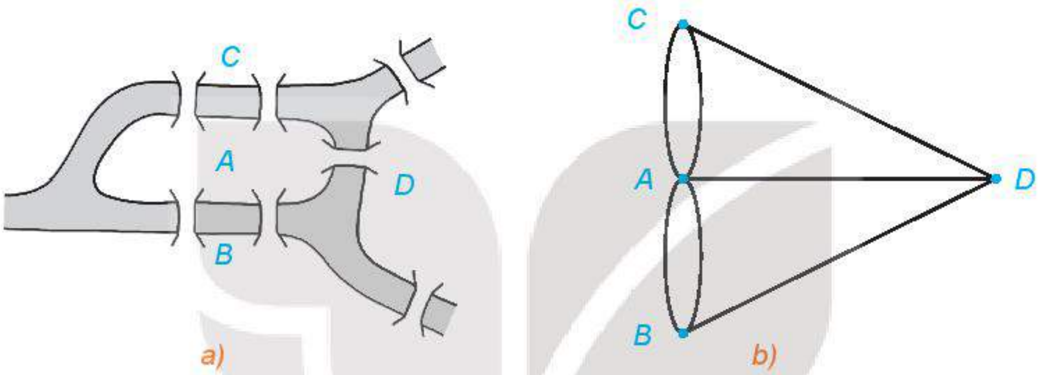
THUẬT NGỮ

- Đường đi Euler
- Đường đi Hamilton

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

Nhận biết đường đi Euler, đường đi Hamilton từ đồ thị.

Trong lí thuyết đồ thị, bài toán Bảy cây cầu ở Königsberg (nay là thành phố Kaliningrad, nước Nga) được phát biểu như sau: Thành phố có 7 cây cầu bắc qua sông như Hình 2.15a dưới đây; có thể nào đi dạo qua khắp các cây cầu nhưng mỗi cầu chỉ đi qua một lần không?

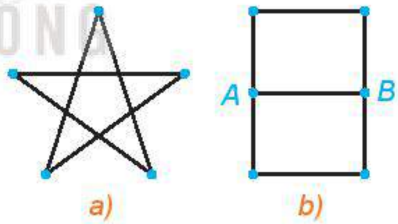


Hình 2.15

Nếu ta coi mỗi khu vực *A, B, C, D* của thành phố là một đỉnh, mỗi cầu qua lại hai khu vực như một cạnh nối hai đỉnh, thì bản đồ thành phố Königsberg là một đa đồ thị như Hình 2.15b. Vấn đề đặt ra chính là: Có thể vẽ được Hình 2.15b bằng một nét liền hay không?

1. ĐƯỜNG ĐI EULER

a) Khái niệm đường đi Euler

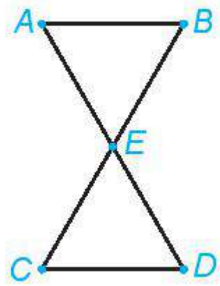


Hình 2.16

HĐ1. Nhận biết đường đi Euler

Hãy thử vẽ mỗi hình trên Hình 2.16 bằng một nét liền.

> Cho một đa đồ thị *G*.
>
> Một đường đi đơn giản từ đỉnh *A* đến đỉnh *B* và chứa mọi cạnh của *G* được gọi là một đường đi Euler từ *A* đến *B*.
>
> Một chu trình đơn giản chứa mọi cạnh của *G* được gọi là một chu trình Euler của *G*.



Hình 2.17

Ví dụ 1. Tìm một chu trình Euler của đồ thị trên Hình 2.17

Giải

Một chu trình Euler của đồ thị là *ABECDEA*.

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

Định lí sau đây cho ta một điều kiện cần và đủ để một đa đồ thị có chu trình Euler.

Định lí 1 (Euler)

> Một đa đồ thị *G* có một chu trình Euler khi và chỉ khi *G* liên thông và mọi đỉnh của *G* đều có bậc chẵn.

Từ Định lí 1 ta có thể chứng minh định lí sau.

Định lí 2

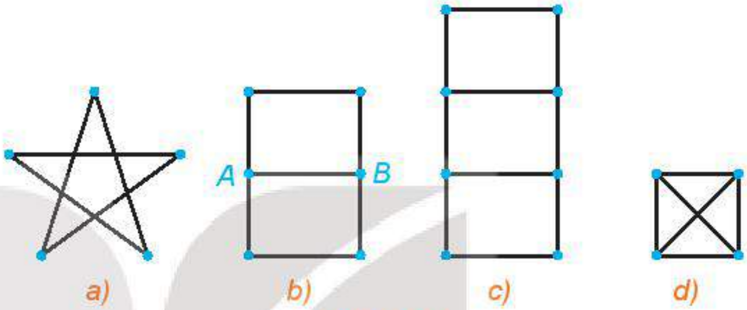
> Một đa đồ thị *G* có một đường đi Euler từ *A* đến *B* khi và chỉ khi *G* liên thông và mọi đỉnh của *G* đều có bậc chẵn, chỉ trừ *A* và *B* có bậc lẻ.

Chú ý. Hai định lí trên cũng đúng cho trường hợp *G* là đơn đồ thị.

Ví dụ 2. Giải thích vì sao trong Hình 2.18:

a) Các hình a) và b) có thể vẽ được bằng một nét liền;

b) Các hình c) và d) không thể vẽ được bằng một nét liền.



Hình 2.18

Giải

Đồ thị ở hình a) là liên thông và các đỉnh đều có bậc chẵn (ở đây là bậc bằng 2) nên nó có chu trình Euler. Đồ thị ở hình b) là liên thông và chỉ có đúng hai đỉnh bậc lẻ (ở đây là bậc bằng 3) nên nó có đường đi Euler. Vì vậy ta có thể vẽ các hình a) và b) bằng một nét liền.

Các đồ thị ở hình c) và d) có bốn đỉnh bậc lẻ (ở đây là bậc bằng 3) nên chúng không có chu trình Euler và cũng không có đường đi Euler. Vì vậy ta không thể vẽ các hình c) và d) bằng một nét liền.

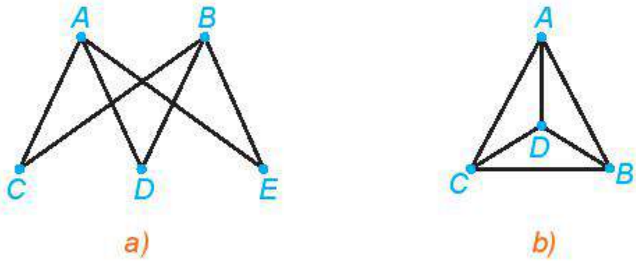
Ví dụ 3. Hãy giải bài toán trong *tình huống mở đầu.*

Giải

Xét đa đồ thị *G* ở Hình 2.15b. Vì các đỉnh *A, B, C, D* đều có bậc lẻ nên theo Định lí 2, *G* không có đường đi Euler (và không có cả chu trình Euler).

Vậy không thể nào đi dạo qua khắp các cây cầu của thành phố Königsberg nhưng mỗi cầu chỉ đi qua một lần.

Luyện tập 1. Đồ thị nào dưới đây có một đường đi Euler? Hãy chỉ ra một đường đi Euler của nó.

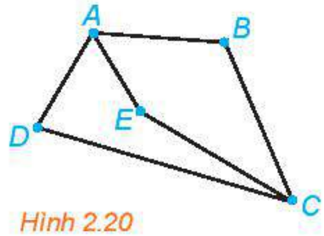


Hình 2.19

2. ĐƯỜNG ĐI HAMILTON

HĐ2. Nhận biết đường đi Hamilton

Có 5 thành phố du lịch *A, B, C, D, E* và các con đường nối các thành phố này như Hình 2.20. Hãy chỉ ra một cách để đi tham quan cả 5 thành phố đó, mà không cần đến địa điểm nào quá một lần.

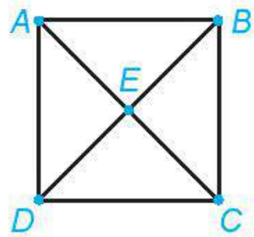


Hình 2.20

Một đường đi sơ cấp từ đỉnh *A* đến đỉnh *B* và qua mọi đỉnh của đồ thị *G* được gọi là một đường đi Hamilton từ *A* đến *B*.

Một chu trình sơ cấp chứa mọi đỉnh của *G* được gọi là một chu trình Hamilton của *G*.

Ví dụ 4. Tìm một chu trình Hamilton của đồ thị trên Hình 2.21.



Hình 2.21

Giải

Một chu trình Hamilton của đồ thị là *ABECDA*.

Định lí sau đây cho ta một điều kiện đủ cho sự tồn tại chu trình Hamilton.

Định lí 3 (Ore)

Nếu *G* là đơn đồ thị có *n* đỉnh ($n \geq 3$) và mỗi cặp đỉnh không kề nhau đều có tổng bậc không nhỏ hơn *n* thì *G* có một chu trình Hamilton.

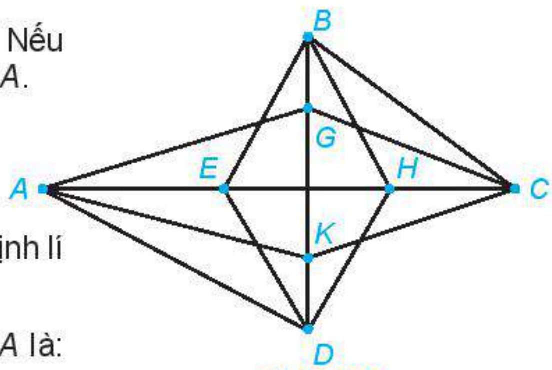
Hệ quả (Định lí Dirac). Nếu *G* là đơn đồ thị có *n* đỉnh ($n \geq 3$) và mỗi đỉnh có bậc không nhỏ hơn $\frac{n}{2}$ thì *G* có một chu trình Hamilton.

Từ Định lí Dirac ta chứng minh được :

Định lí 4

Nếu đơn đồ thị *G* có *n* đỉnh ($n \geq 3$) và mỗi đỉnh có bậc không nhỏ hơn $\frac{n-1}{2}$ thì *G* có một đường đi Hamilton.

Ví dụ 5. Đồ thị Hình 2.22 có chu trình Hamilton không? Nếu có, hãy chỉ ra một chu trình Hamilton xuất phát từ đỉnh *A*.



Hình 2.22

Giải

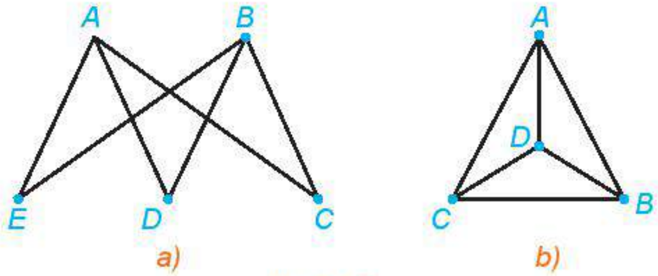
Đồ thị có 8 đỉnh, mỗi đỉnh đều có bậc là 4. Do đó, theo Định lí Dirac, đồ thị có một chu trình Hamilton.

Có thể thấy một chu trình Hamilton xuất phát từ đỉnh *A* là: *AGCKDHBEA*.

Chú ý. Trong một số trường hợp đơn giản, ta có thể tìm đường đi (chu trình Hamilton) của *G* hoặc chứng minh *G* không có đường đi (chu trình Hamilton) dựa vào nhận xét sau: Đường đi (chu trình) Hamilton phải đi qua các cạnh có đầu mút tại những đỉnh có bậc 2.

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

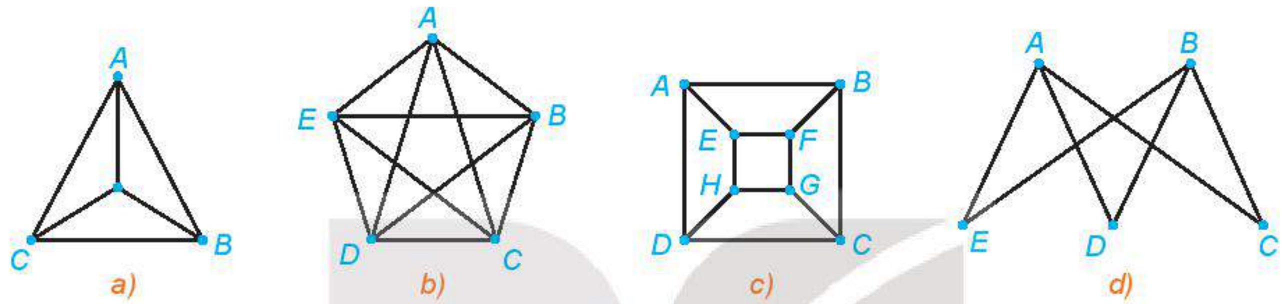
Luyện tập 2. Đồ thị nào trong Hình 2.23 có đường đi Hamilton? Hãy chỉ ra một đường đi Hamilton của nó.



Hình 2.23

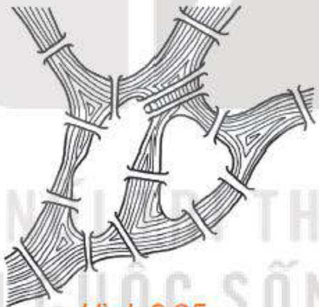
BÀI TẬP

2.7. Mỗi đồ thị sau có một chu trình Euler hoặc một chu trình Hamilton hay không? Hãy vẽ một chu trình Euler hoặc một chu trình Hamilton khi có thể.



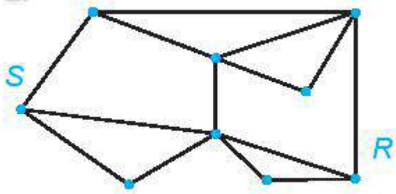
Hình 2.24

2.8. Có thể nào đi dạo chơi qua các cây cầu trong Hình 2.25, mỗi cây cầu vừa đúng một lần?



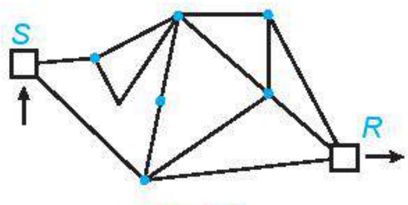
Hình 2.25

2.9. Cho đồ thị G như Hình 2.26. Tìm một chu trình Hamilton xuất phát từ đỉnh S của G.



Hình 2.26

2.10. Cho đồ thị G như Hình 2.27. Tìm một đường đi Hamilton từ S đến R.



Hình 2.27

2.11. Hãy chỉ ra một ví dụ chứng tỏ rằng điều kiện bậc của mỗi đỉnh của đồ thị G không nhỏ hơn $\frac{n}{2}$ trong Định lí Dirac, không thể thay bằng điều kiện "bậc của mỗi đỉnh không nhỏ hơn $\frac{n-1}{2}$".

2.12. a) Giả sử G là một đồ thị với n đỉnh và $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+2$ cạnh. Sử dụng Định lí Ore, hãy chứng minh G có một chu trình Hamilton.

b) Tìm một đồ thị với n đỉnh và $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$ cạnh mà không có chu trình Hamilton.

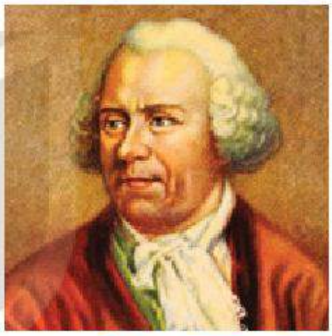
2.13. Với giá trị nào của n thì đồ thị đầy đủ K_n có một chu trình Euler? Có một đường đi Euler?

2.14. Với giá trị nào của n thì đồ thị đầy đủ K_n có một chu trình Hamilton? Có một đường đi Hamilton?

Em có biết?

Euler và lí thuyết đồ thị

Leonhard Euler (1707 – 1783) là một trong những nhà toán học vĩ đại nhất trong lịch sử. Ông đã có những khám phá quan trọng và đóng góp tiên phong trong nhiều chuyên ngành toán học. Ông cũng giới thiệu nhiều thuật ngữ và kí hiệu toán hiện đại, được dùng phổ biến ngày nay như kí hiệu số e dùng làm cơ số cho logarit tự nhiên, kí hiệu $f(x)$ cho hàm số, kí hiệu các hàm lượng giác, kí hiệu Σ để chỉ tổng, ... Một nhận xét của nhà toán học người Pháp Laplace đã thể hiện ảnh hưởng của Euler đối với toán học: "*Hãy đọc Euler, đọc Euler đi, ông ấy là bậc thầy của tất cả chúng ta.*"



Leonhard Euler (1707 – 1783), nhà toán học người Thuỵ Sĩ

Bài báo của Euler về lời giải bài toán *Bảy cây cầu ở Königsberg*, xuất bản năm 1736, được coi là công trình đầu tiên về lí thuyết đồ thị.

Một trong những bài toán nổi tiếng và thú vị nhất của lí thuyết đồ thị là **bài toán bốn màu**: "*Liệu rằng chỉ với bốn màu có thể tô màu một bản đồ bất kì sao cho không có hai nước nào cùng biên giới được tô cùng màu hay không*?" Bài toán này được đề xuất bởi Francis Guthrine năm 1852, và chỉ được giải sau gần một thế kỉ vào năm 1976 bởi Kenneth Appel và Wolfgang Haken, với lời giải dựa vào sự hỗ trợ của máy tính. Trong khi cố gắng giải quyết bài toán này, các nhà toán học đã phát minh ra nhiều thuật ngữ và khái niệm nền tảng cho lí thuyết đồ thị.

Đồ thị biểu diễn được rất nhiều cấu trúc, nhiều mối quan hệ và quá trình trong các hệ vật lí, sinh học, quan hệ xã hội, hệ thống thông tin, mạng lưới giao thông, ... và do đó ngày nay lí thuyết đồ thị được nghiên cứu rất mạnh mẽ và có nhiều ứng dụng thực tế quan trọng.

Một vài bài toán về tìm đường đi trong thực tế như bài toán tìm đường đi tối ưu (ngắn nhất, nhanh nhất, có chi phí rẻ nhất,...) trong những tình huống đơn giản sẽ được nghiên cứu ở bài học sau.

(Theo *scienceworld.wolfram.com*)

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

Bài 10 BÀI TOÁN TÌM ĐƯỜNG ĐI TỐI ƯU TRONG MỘT VÀI TRƯỜNG HỢP ĐƠN GIẢN

THUẬT NGỮ

- Đồ thị có trọng số
- Trọng số

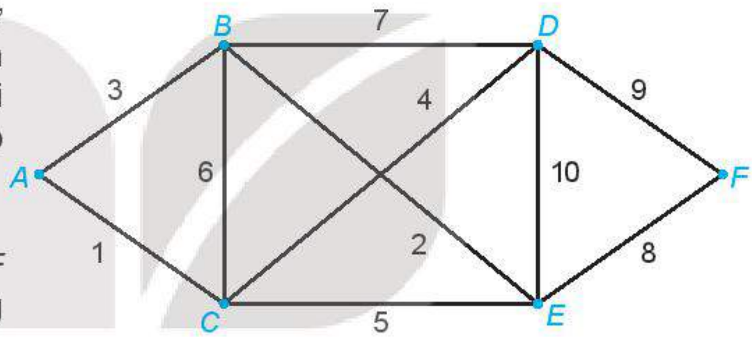
KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết được thuật toán về tìm đường đi tối ưu trong những trường hợp đơn giản.
- Sử dụng kiến thức về đồ thị để giải quyết một số tình huống liên quan đến thực tiễn.

Trong bài học này chúng ta sẽ sử dụng kiến thức về đồ thị để giải quyết một số tình huống liên quan đến thực tiễn như bài toán tìm đường đi thoả mãn điều kiện cho trước (ngắn nhất, nhanh nhất, có chi phí rẻ nhất, ...) trong một vài trường hợp đơn giản.

1. BÀI TOÁN TÌM ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT

HĐ. Cho sơ đồ như trên Hình 2.28, ở đó A, B, C, D, E, F là các địa điểm nối với nhau bởi các con đường với độ dài của mỗi con đường được cho như trên hình.



Hình 2.28

a) Hãy chỉ ra 2 đường đi từ A đến F và so sánh độ dài của hai đường đi đó.

b) Với mỗi đỉnh V của sơ đồ trên Hình 2.28, ta gắn số $l(V)$ là khoảng cách ngắn nhất để đi từ A đến V và gọi là *nhãn vĩnh viễn* của đỉnh V. Như vậy, ta có ngay $l(A) = 0$. Dựa vào Hình 2.28, hãy tìm các nhãn vĩnh viễn $l(B)$, $l(C)$ của hai đỉnh kề với A là B, C.

Để giải quyết bài toán tìm đường đi ngắn nhất nối A với F, chúng ta sẽ xem sơ đồ đã cho như một đồ thị liên thông và mỗi cạnh được gắn với một số không âm, số đó chính là độ dài của con đường. Những đồ thị như vậy gọi là đồ thị có trọng số và con số được gắn với một cạnh gọi là trọng số của cạnh đó. Bài toán đã cho trở thành tìm một đường đi từ A đến F với tổng các trọng số nhỏ nhất, tức là cần xác định nhãn vĩnh viễn $l(F)$.

- Đồ thị có trọng số là một đồ thị liên thông và mỗi cạnh được gắn với một số không âm, gọi là trọng số của cạnh đó.
- Để tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh A đến đỉnh F của một đồ thị có trọng số, ta xuất phát từ đỉnh A và di chuyển theo các cạnh của đồ thị. Với mỗi đỉnh V, ta gắn một số $l(V)$ là khoảng cách ngắn nhất để đi từ A đến V, gọi là *nhãn vĩnh viễn* của đỉnh V. Như vậy, để tìm độ dài của đường đi ngắn nhất nối A với F, ta cần tìm $l(F)$.

Ví dụ 1. Tìm độ dài của đường đi ngắn nhất nối A với F trong đồ thị có trọng số trên Hình 2.28

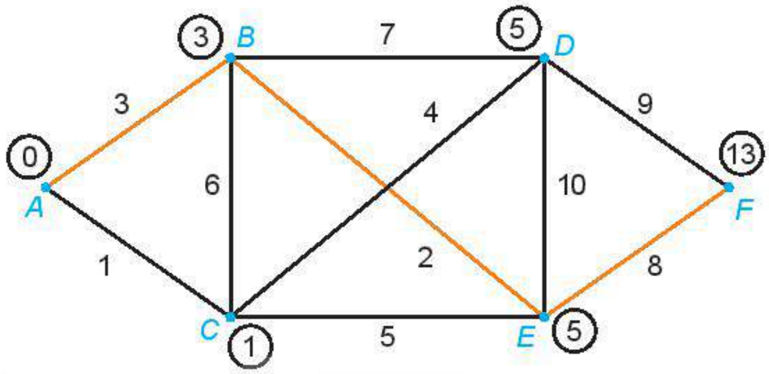
Giải

Ta áp dụng thuật toán đã mô tả ở trên.

Đầu tiên ta gắn nhãn đỉnh A là $l(A) = 0$ và gắn cho 2 đỉnh kề với A là B, C các nhãn tạm thời $l(A) + 3 = 3$, $l(A) + 1 = 1$. Chọn số nhỏ nhất trong chúng và viết $l(C) = 1$. Đỉnh C bây giờ được gắn *nhãn vĩnh viễn* là 1.

Tiếp theo ta gắn cho các đỉnh kề với C là B, D, E các nhãn tạm thời $l(C) + 6 = 7$, $l(C) + 4 = 5$, $l(C) + 5 = 6$ (B hiện nay có hai nhãn tạm thời là 3 và 7). Nhãn tạm thời nhỏ nhất trong các nhãn đã gán (ở B, D, E) hiện nay là 3 (tại B), nên ta viết $l(B) = 3$. Đỉnh B được gắn *nhãn vĩnh viễn* là 3.

Bây giờ ta xét các đỉnh kề với B (mà chưa được gắn nhãn vĩnh viễn) là D và E. Ta gắn cho đỉnh D nhãn tạm thời $l(B) + 7 = 10$ (D hiện nay có hai nhãn tạm thời là 5 và 10), gắn cho đỉnh E nhãn tạm thời $l(B) + 2 = 5$ (E có hai nhãn tạm thời là 6 và 5). Nhãn tạm thời nhỏ nhất bây giờ là 5 (tại D và E), do đó ta viết $l(D) = 5$ và $l(E) = 5$. Hai đỉnh D và E đều được gắn *nhãn vĩnh viễn* là 5.



Hình 2.29

Xét đỉnh kề với D là F, ta gắn cho F nhãn tạm thời $l(D) + 9 = 14$. Xét đỉnh kề với E là F, ta gắn cho F nhãn tạm thời $l(E) + 8 = 13$. Vậy đỉnh F sẽ được gắn *nhãn vĩnh viễn* là 13.

Vì $l(F) = 13$ nên đường đi ngắn nhất từ A đến F có độ dài là 13.

Để tìm một đường đi ngắn nhất từ A đến F như vậy, ta sẽ lần ngược từ điểm cuối F. Ta chỉ cần giới hạn ở việc xét những cạnh mà độ dài là hiệu của các nhãn gắn tại các đầu mút của nó, đó là: EF, BE và AB (do $l(F) - l(E) = 13 - 5 = 8$, $l(E) - l(B) = 5 - 3 = 2$ và $l(B) - l(A) = 3 - 0 = 3$). Khi đó ta có thể kết luận, đường đi ngắn nhất từ A đến F phải đi qua các cạnh EF, BE và AB.

Vậy, đường đi ngắn nhất (trong trường hợp này là duy nhất) từ A đến F là

$$A \to B \to E \to F.$$

Chú ý

a) Nếu đồ thị có trọng số mà mỗi cạnh đều có trọng số là 1 thì bài toán trở thành tìm số các cạnh của đường đi ngắn nhất từ A đến F.

b) Các con số trong sơ đồ ở Hình 2.28 có thể là thời gian để đi dọc con đường đó, hoặc là chi phí khi đi hết con đường đó, ... Bởi vậy, ta có sử dụng thuật toán giải quyết bài toán gốc về bài toán tìm đường đi ngắn nhất để giải quyết bài toán tìm đường đi nhanh nhất hoặc đường đi có chi phí rẻ nhất, ...

2. BÀI TOÁN NGƯỜI ĐƯA THƯ

Bài toán người đưa thư phát biểu như sau: *Một người đưa thư xuất phát từ bưu điện phải đi qua một số con đường để phát thư rồi quay lại điểm xuất phát, hỏi người đó phải đi như thế nào để đường đi là ngắn nhất. Ở đây các điểm cần phát thư nằm dọc theo các con đường cần phải đi qua.*

Trong bài toán này, người đưa thư sẽ phải đi trên mỗi con đường ít nhất một lần (để phát được thư cho các điểm cần phát nằm dọc theo con đường đó) và cuối cùng quay lại vị trí xuất phát. Ngoài ra, cần đảm bảo quãng đường phải đi là nhỏ nhất có thể.

Trong ngôn ngữ của lí thuyết đồ thị, bài toán người đưa thư tương đương với bài toán tìm chu trình ngắn nhất đi qua tất cả các cạnh của một đồ thị cho trước.

Bài toán này có thể phát biểu dưới dạng một đồ thị có trọng số, ở đó đồ thị ứng với hệ thống các con đường, và trọng số của mỗi cạnh là độ dài của con đường tương ứng. Các cạnh của đồ thị này mô tả các con đường cần phải đi qua, các đỉnh của đồ thị là điểm đầu và điểm cuối của các con đường đó (và có thể không phải là điểm cần phát thư). Khi đó ta cần tìm một chu trình có tổng trọng số nhỏ nhất và chứa mỗi cạnh ít nhất một lần. Trong trường hợp tổng quát, nói chung đây là một bài toán khá phức tạp.

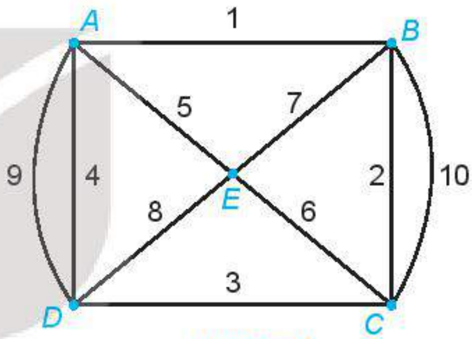
Trong mục này, ta chỉ xét hai tình huống đơn giản (liên quan đến đồ thị có trọng số, liên thông):

1) Tất cả các đỉnh của đồ thị đều có bậc chẵn. Khi đó đồ thị có chu trình Euler và chu trình Euler đó chính là một đường đi yêu cầu.

2) Chỉ có đúng hai đỉnh của đồ thị có bậc lẻ. Khi đó ta có thể tìm một đường đi Euler từ đỉnh bậc lẻ này đến đỉnh bậc lẻ kia, sau đó dùng thuật toán ở Mục 1 tìm đường đi ngắn nhất để quay trở lại đỉnh xuất phát. Kết hợp hai đường đi đó, ta được lời giải của bài toán đã cho.

Dưới đây ta xét hai ví dụ minh hoạ cho hai trường hợp này.

Ví dụ 2. Cho đồ thị có trọng số như Hình 2.30. Chứng tỏ rằng đồ thị có chu trình Euler và hãy tìm một chu trình Euler xuất phát từ đỉnh *A*.



Hình 2.30

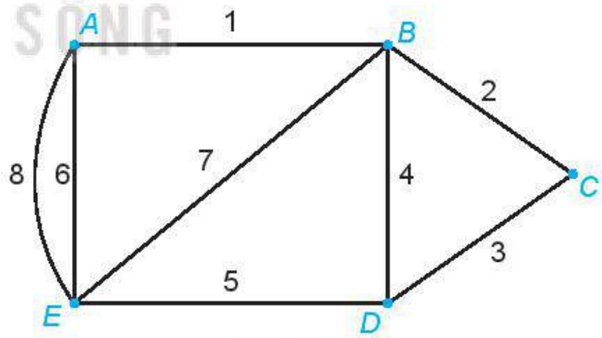
Giải

Vì đồ thị là liên thông và các đỉnh đều có bậc chẵn (ở đây đều là bậc 4) nên đồ thị có chu trình Euler.

Một chu trình Euler xuất phát từ đỉnh *A* là *ABCBECDEADA*.

Chú ý. Nếu đồ thị có chu trình Euler thì độ dài quãng đường phải đi trong lời giải của bài toán người đưa thư chính là tổng các trọng số gắn trên các cạnh của đồ thị.

Ví dụ 3. Cho một đồ thị có trọng số như Hình 2.31. Tìm một chu trình xuất phát từ đỉnh *A* của đồ thị, có tổng trọng số nhỏ nhất và chứa mỗi cạnh ít nhất một lần.



Hình 2.31

Giải

Đồ thị chỉ có hai đỉnh bậc lẻ là *A* và *D* nên ta có thể tìm được một đường đi Euler từ *A* đến *D* (đường đi này đi qua mỗi cạnh đúng một lần).

Một đường đi Euler từ *A* đến *D* là *AEABEDBCD* và tổng độ dài của nó là

$$6 + 8 + 1 + 7 + 5 + 4 + 2 + 3 = 36.$$

Để quay trở lại điểm xuất phát và có đường đi ngắn nhất, ta cần tìm một đường đi ngắn nhất từ *D* đến *A* theo thuật toán đã mô tả ở Mục 1.

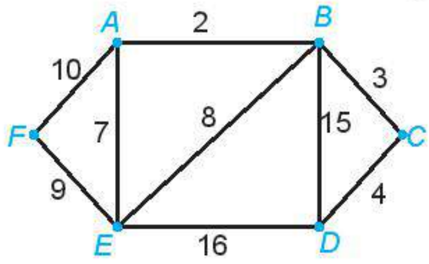
Đường đi ngắn nhất từ *D* đến *A* là *DBA* và có độ dài là $4 + 1 = 5$.

Vậy một chu trình cần tìm là *AEABEDBCDBA* và có độ dài là $36 + 5 = 41$.

Chú ý. Trong lí thuyết đồ thị, người ta thường phát biểu đề bài của Ví dụ 2 dưới dạng: *Giải bài toán người đưa thư đối với đồ thị có trọng số trên Hình 2.31.*

Từ đây về sau, ta cũng dùng cách phát biểu ngắn gọn như vậy.

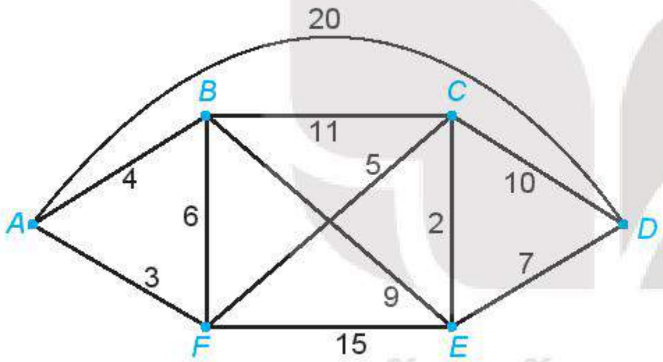
Luyện tập. Giải bài toán người đưa thư đối với đồ thị có trọng số trên Hình 2.32.



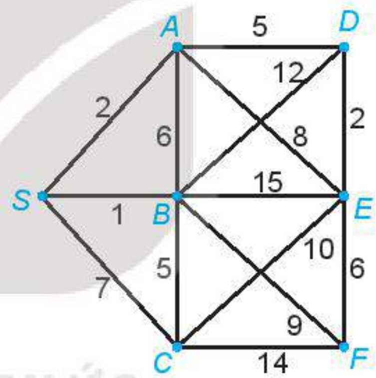
Hình 2.32

BÀI TẬP

2.15. Tìm đường đi ngắn nhất từ A đến D trong đồ thị có trọng số trên Hình 2.33.



Hình 2.33

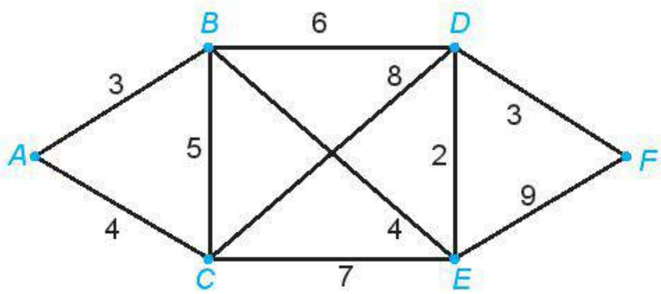


Hình 2.34

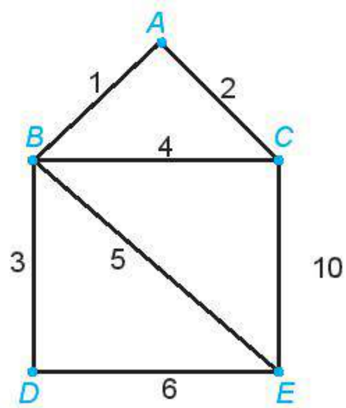
KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

2.16. Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh S đến mỗi đỉnh khác của đồ thị có trọng số trên Hình 2.34.

2.17. Giải bài toán người đưa thư đối với đồ thị có trọng số trên Hình 2.35.



Hình 2.35

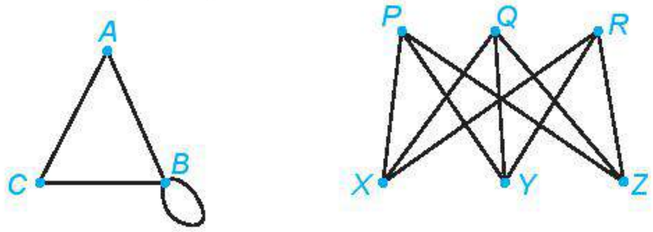


Hình 2.36

2.18. Giải bài toán người đưa thư đối với đồ thị có trọng số trên Hình 2.36.

BÀI TẬP CUỐI CHUYÊN ĐỀ 2

2.19. Viết tập hợp các đỉnh và tập hợp các cạnh của mỗi đồ thị sau:



a) b)

Hình 2.37

2.20. Vẽ đồ thị $G = (V, E)$ với các đỉnh và các cạnh như sau:

$V = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ và $E = \{12; 13; 23; 34; 35; 67; 68; 78\}$.

Đồ thị này có phải là đơn đồ thị không? Có phải là đồ thị đầy đủ không?

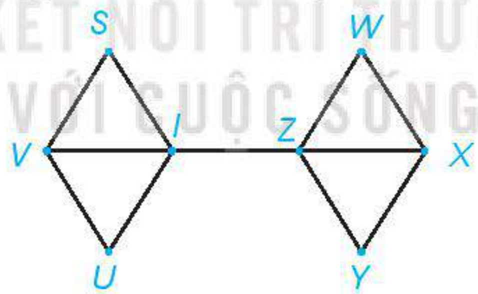
2.21. Chứng minh rằng không có đơn đồ thị với 12 đỉnh và 28 cạnh mà các đỉnh đều có bậc 3 hoặc 6.

2.22. Chứng minh rằng nếu G là một đơn đồ thị có ít nhất hai đỉnh thì G có ít nhất hai đỉnh có cùng bậc.

2.23. Tìm số đỉnh nhỏ nhất cần thiết để có thể xây dựng một đồ thị đầy đủ với ít nhất 1 000 cạnh.

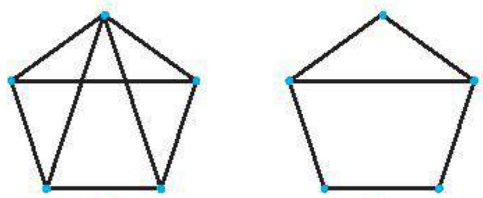
2.24. Hãy chỉ ra ít nhất 5 đường đi từ S đến Y trong đồ thị trên Hình 2.38.

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG



Hình 2.38

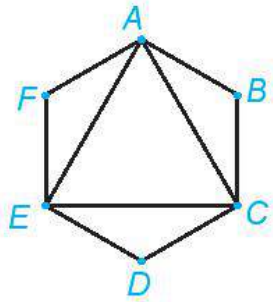
2.25. Kiểm tra xem các điều kiện của định lí Ore có thoả mãn với các đồ thị trên Hình 2.39 không.



a) b)

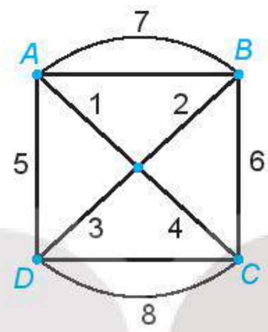
Hình 2.39

2.26. Tìm một chu trình Euler trong đồ thị trên Hình 2.40.



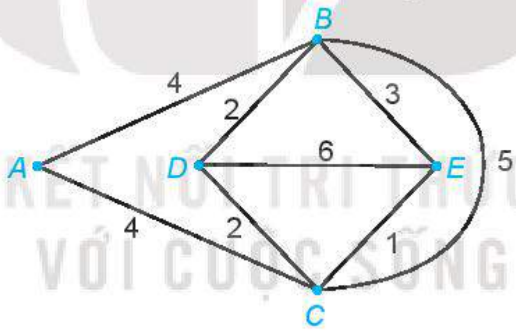
Hình 2.40

2.27. Giải bài toán người đưa thư đối với đồ thị có trọng số trên Hình 2.41.



Hình 2.41

2.28. Giải bài toán người đưa thư đối với đồ thị có trọng số trên Hình 2.42.

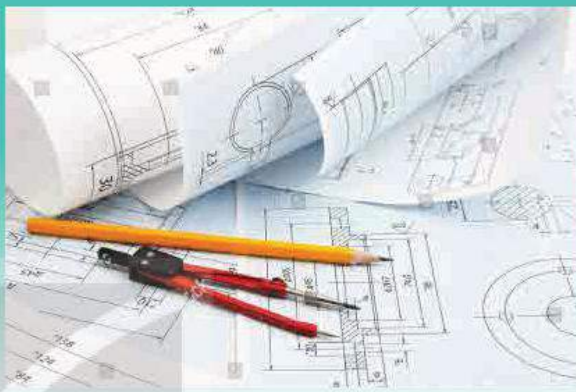


Hình 2.42

CHUYÊN ĐỀ 3

MỘT SỐ YẾU TỐ VẼ KĨ THUẬT

Bản vẽ kĩ thuật là một tài liệu thường được dùng trong kĩ thuật. Nó chứa đầy đủ các thông tin về hình dạng, kết cấu và kích thước của sản phẩm và do đó giúp cho việc truyền đạt ý tưởng của người thiết kế đến người thi công, thực hiện bản vẽ được dễ dàng hơn. Trong chương trình môn Công nghệ ở lớp 8 và lớp 10, ta đã được học về các tiêu chuẩn của một bản vẽ kĩ thuật. Chuyên đề này sẽ giúp ta hiểu biết sâu hơn về bản vẽ kĩ thuật dựa trên nền tảng kiến thức đã biết về hình học không gian.



Bài 11 HÌNH CHIẾU VUÔNG GÓC VÀ HÌNH CHIẾU TRỤC ĐO

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

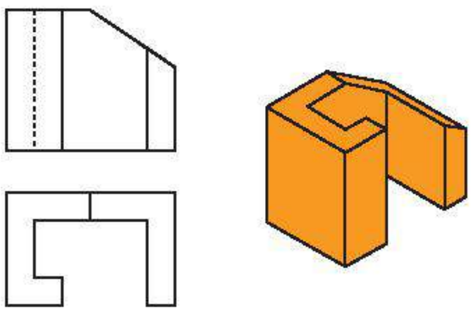
THUẬT NGỮ

- Hình biểu diễn
- Hình chiếu vuông góc
- Hình chiếu trục đo
- Hình chiếu trục đo vuông góc đều
- Hệ số biến dạng

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết được hình biểu diễn của vật thể.
- Nhận biết được hình chiếu vuông góc.
- Nhận biết được hình chiếu trục đo và hình chiếu trục đo vuông góc đều.

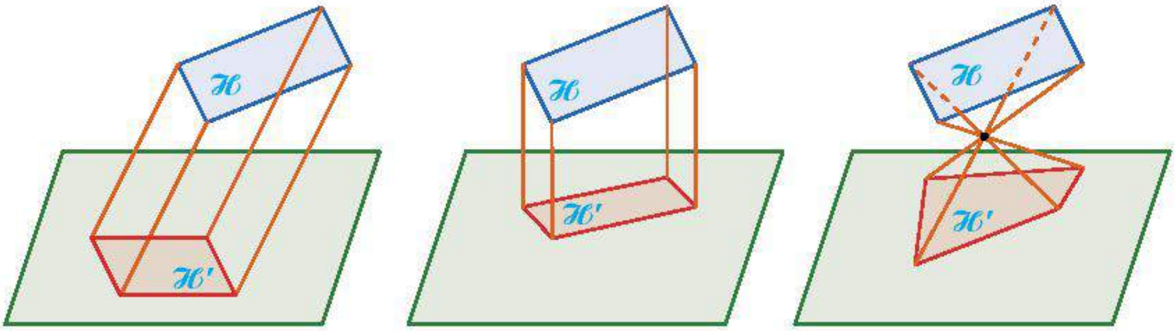
Trong vẽ kĩ thuật, người ta thường sử dụng các hình vẽ trên giấy để biểu diễn, mô tả các vật thể trong không gian (H.3.1). Toán học mô tả các hình vẽ đó như thế nào, và chúng có những đặc điểm gì? Em hãy cùng tìm hiểu qua bài học này.



Hình 3.1. Hình vẽ mô tả một chi tiết máy

1. HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH, KHỐI

HĐ1. Hình 3.2 mô tả ba phép chiếu biến hình $\mathscr{H}$ thành hình $\mathscr{H}'$. Em đã biết những phép chiếu nào trong ba phép chiếu đó? Hãy nhắc lại khái niệm về các phép chiếu mà em đã học.



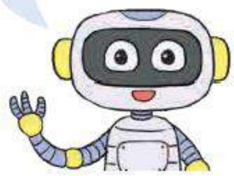
a) b) c)

Hình 3.2

Hình biểu diễn $\mathscr{H}'$ của một hình, khối $\mathscr{H}$ trong không gian là hình chiếu của $\mathscr{H}$ lên một mặt phẳng qua một phép chiếu.

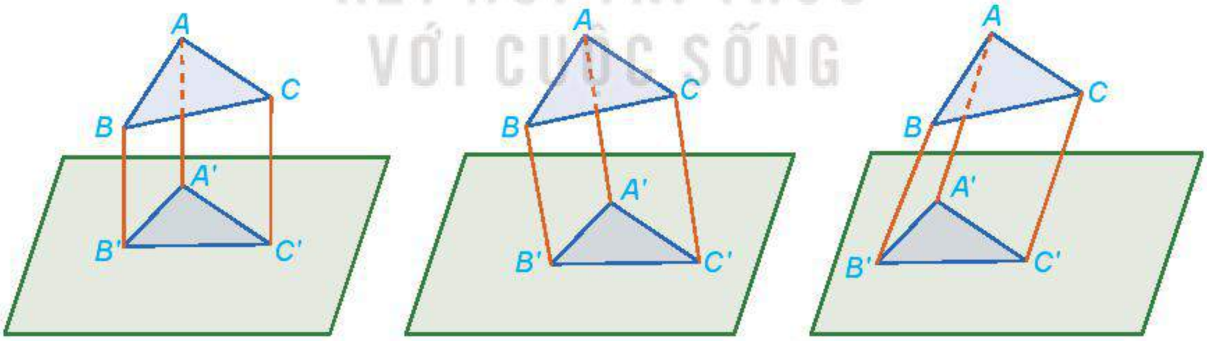
- Nếu phép chiếu là phép chiếu vuông góc thì $\mathscr{H}'$ được gọi là hình chiếu vuông góc của $\mathscr{H}$.
- Nếu phép chiếu là phép chiếu song song (nhưng không là phép chiếu vuông góc) thì $\mathscr{H}'$ được gọi là hình chiếu trục đo của $\mathscr{H}$.

Phép chiếu còn lại trong Hình 3.2 được gọi là phép chiếu xuyên tâm và hình $\mathscr{H}'$ khi đó được gọi là hình chiếu phối cảnh của hình $\mathscr{H}$.



Ví dụ 1. Quan sát Hình 3.3 và cho biết hình nào thể hiện hình chiếu vuông góc, hình nào thể hiện hình chiếu trục đo của tam giác *ABC*.

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG



a) b) c)

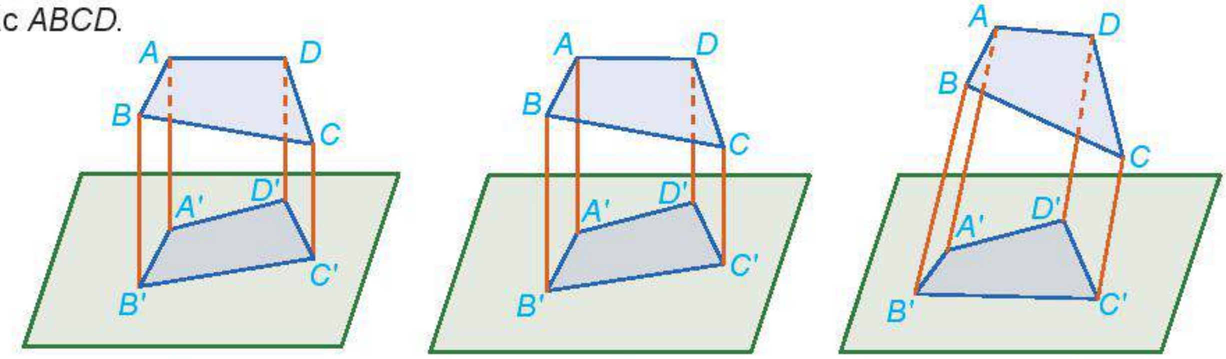
Hình 3.3

Giải

Trong Hình 3.3*a* các đường thẳng *AA'*, *BB'*, *CC'* đôi một song song và vuông góc với mặt phẳng chiếu. Do đó Hình 3.3*a* thể hiện hình chiếu vuông góc của tam giác *ABC*.

Trong Hình 3.3*b* và Hình 3.3*c* các đường thẳng *AA'*, *BB'*, *CC'* đôi một song song nhưng không vuông góc với mặt phẳng chiếu. Do đó Hình 3.3*b* và Hình 3.3*c* thể hiện hình chiếu trục đo của tam giác *ABC*.

Luyện tập 1. Quan sát Hình 3.4 và cho biết hình nào thể hiện hình chiếu trục đo của tứ giác *ABCD*.

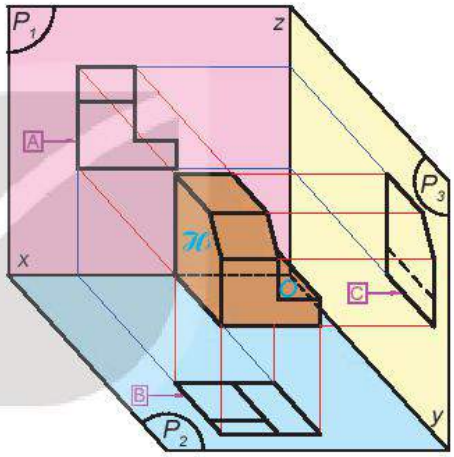


a) b) c)

Hình 3.4

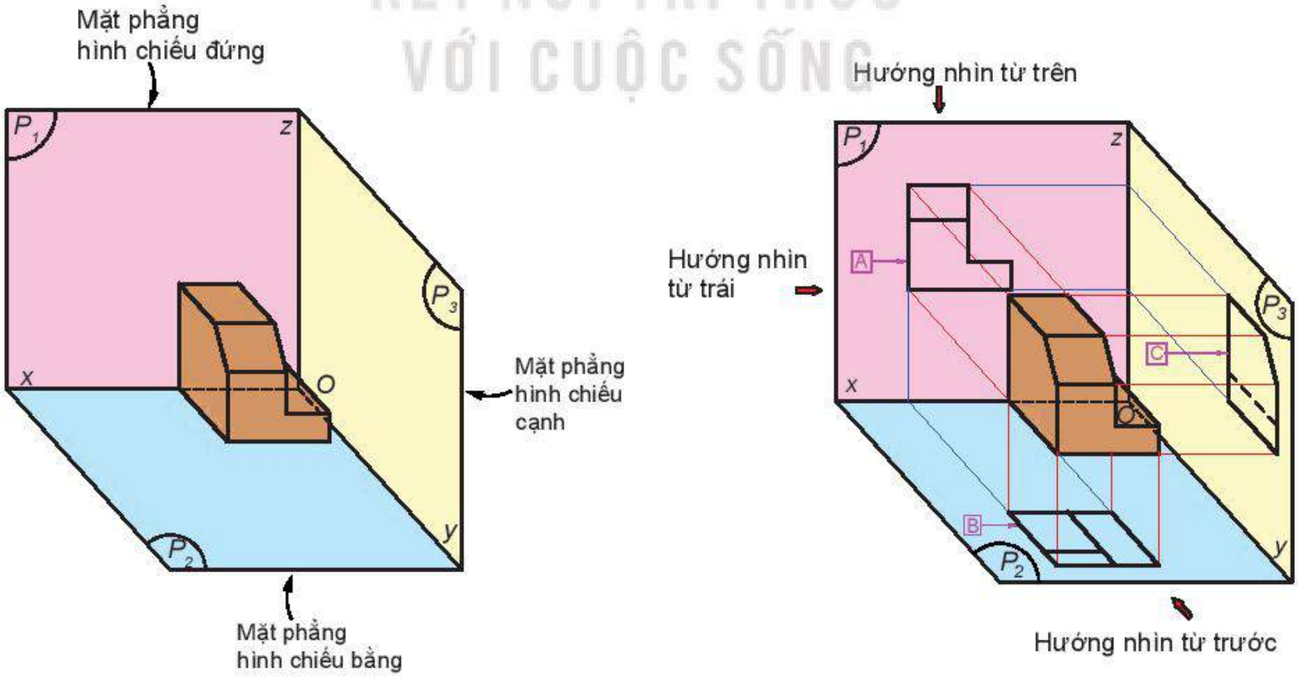
2. HÌNH CHIẾU ĐỨNG, HÌNH CHIẾU BẰNG VÀ HÌNH CHIẾU CẠNH

HĐ2. Quan sát *Hình 3.5* và cho biết các hình *A*, *B*, *C* có phải là hình chiếu của hình $\mathscr{H}$ qua các phép chiếu song song hoặc vuông góc hay không. Nếu có hãy chỉ rõ mặt phẳng chiếu và phương chiếu của mỗi phép chiếu đó.



Hình 3.5

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG



a) b)

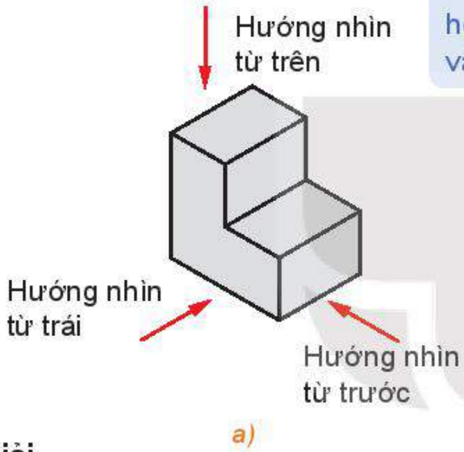
Hình 3.6

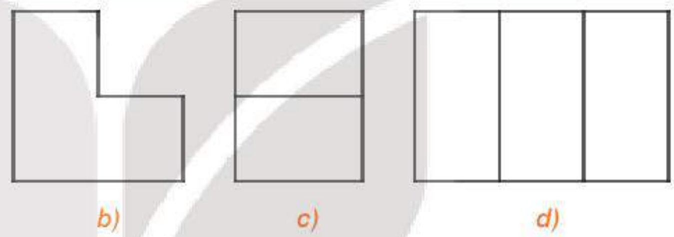
Cho hình $\mathcal{H}$ trong không gian và ba mặt phẳng (P_1), (P_2), (P_3) đôi một vuông góc với nhau sao cho mặt phẳng (P_1) vuông góc với hướng nhìn từ phía trước của hình $\mathcal{H}$, mặt phẳng (P_2) vuông góc với hướng nhìn từ phía trên của hình $\mathcal{H}$ và mặt phẳng (P_3) vuông góc với hướng nhìn từ phía trái của hình $\mathcal{H}$ (H.3.6). Khi đó:

- Các mặt phẳng (P_1), (P_2) và (P_3) lần lượt được gọi là mặt phẳng hình chiếu đứng, mặt phẳng hình chiếu bằng và mặt phẳng hình chiếu cạnh.
- Các hình chiếu vuông góc của hình $\mathcal{H}$ lên các mặt phẳng (P_1), (P_2), (P_3) lần lượt được gọi là hình chiếu đứng, hình chiếu bằng và hình chiếu cạnh của hình $\mathcal{H}$.

Ví dụ 2. Xác định hình chiếu vuông góc của hình $\mathcal{H}$ (H.3.7*a*) trong các hình dưới đây.

Trong vẽ kĩ thuật, người ta có thể sử dụng thêm các hướng nhìn từ sau ra trước, từ dưới lên trên và từ phải sang trái để nhận được thêm ba hình chiếu của vật thể, từ đó giúp hình dung vật thể rõ hơn. Tuy nhiên, hình chiếu đứng, hình chiếu bằng và hình chiếu cạnh thường là đủ để mô tả vật thể.



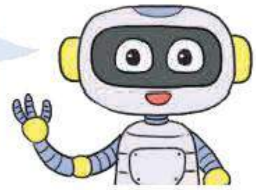


Hình 3.7

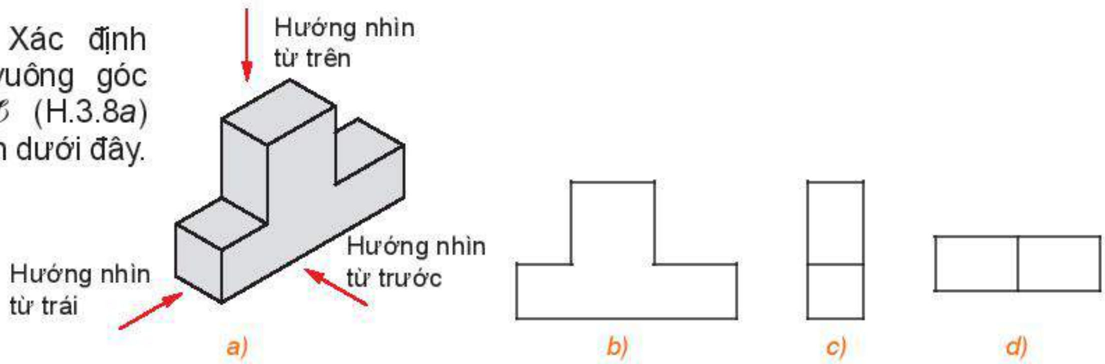
Giải

Hình 3.7*b* là hình chiếu cạnh của hình $\mathcal{H}$, Hình 3.7*c* vừa là hình chiếu đứng vừa là hình chiếu bằng của hình $\mathcal{H}$. Hình 3.7*d* không là hình chiếu vuông góc nào của hình $\mathcal{H}$.

Với hướng nhìn từ trước, em nhìn thấy những phần nào của vật thể?



Luyện tập 2. Xác định hình chiếu vuông góc của hình $\mathcal{H}$ (H.3.8*a*) trong các hình dưới đây.

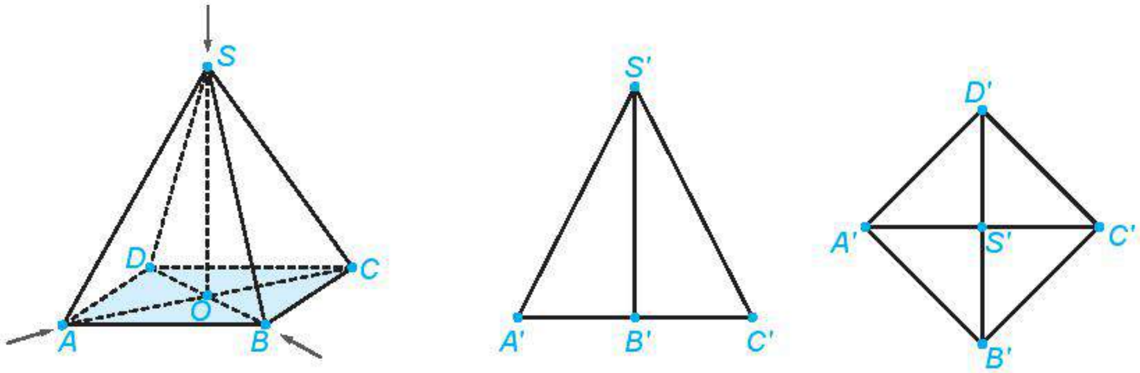


Hình 3.8

Ví dụ 3. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ (H.3.9*a*). Xác định hình chiếu đứng và hình chiếu bằng của hình chóp nếu chọn mặt phẳng hình chiếu đứng (P_1) song song với mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng hình chiếu bằng (P_2) song song với mặt phẳng $(ABCD)$.

Giải

Hình chiếu đứng và hình chiếu bằng của hình chóp $S.ABCD$ lần lượt được cho như trong Hình 3.9*b* và Hình 3.9*c*.



a) b) c)

Hình 3.9

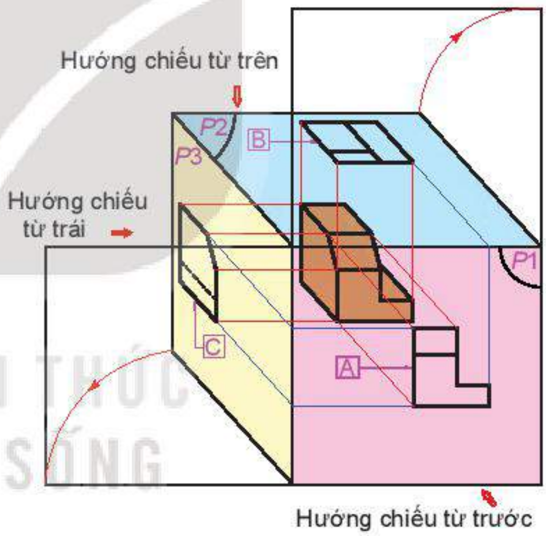
Luyện tập 3. Thực hiện Ví dụ 2 khi mặt phẳng hình chiếu đứng (P_1) song song với mặt phẳng (SBD), mặt phẳng hình chiếu bằng (P_2) song song với mặt phẳng $(ABCD)$.

Nhận xét. Trong Ví dụ 2 đường thẳng BD vuông góc với mặt phẳng (SAC) nên cũng vuông góc với mặt phẳng hình chiếu đứng (P_1). Do đó hình chiếu đứng của ba điểm này trùng nhau.

Một cách tổng quát, các hình chiếu đứng, hình chiếu bằng và hình chiếu cạnh có các tính chất của hình chiếu vuông góc, ví dụ như hình chiếu của trung điểm là trung điểm, hình chiếu của các đường thẳng song song là các đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

❓ Hãy giải thích tại sao trong Hình 3.6*b*, điểm B' (hình chiếu đứng của B) là trung điểm của đoạn thẳng $A'C'$ (hình chiếu đứng của AC).

Vận dụng 1. Trong vẽ kĩ thuật có hai phương pháp chiếu là phương pháp chiếu góc thứ nhất và phương pháp chiếu góc thứ ba. Với phương pháp chiếu góc thứ nhất, vật thể luôn nằm giữa người quan sát và các mặt phẳng hình chiếu (H.3.5), còn với phương pháp chiếu góc thứ ba thì các mặt phẳng hình chiếu luôn nằm giữa người quan sát và vật thể (H.3.10). Mỗi hình chiếu đứng, hình chiếu cạnh và hình chiếu bằng nhận được từ hai phương pháp chiếu đều bằng nhau. Hãy giải thích tại sao.



Hình 3.10

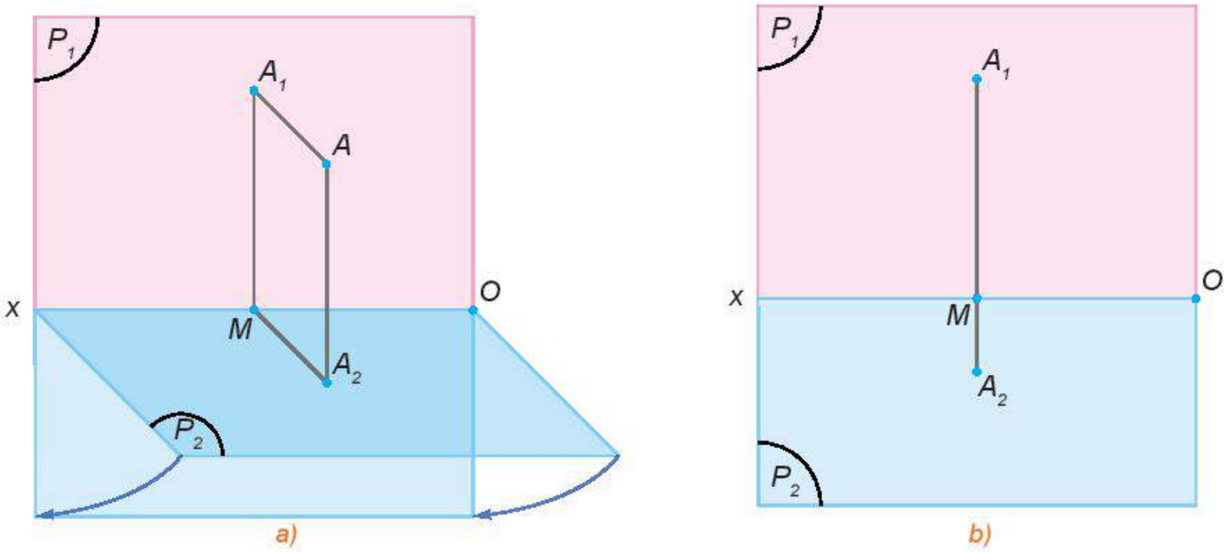
Chú ý. Vì hình chiếu nhận được qua hai phương pháp chiếu góc thứ nhất và thứ ba là như nhau nên từ nay về sau, nếu không giải thích gì thêm, các hình chiếu được nhắc tới đều lấy theo phương pháp chiếu góc thứ nhất.

3. MỐI LIÊN HỆ GIỮA BA HÌNH CHIẾU VUÔNG GÓC

HĐ3. Trong không gian cho điểm A và hai mặt phẳng hình chiếu đứng, hình chiếu bằng (P_1), (P_2) cắt nhau theo giao tuyến Ox. Gọi A_1 và A_2 lần lượt là hình chiếu đứng và hình chiếu bằng của điểm A (*H.3.11a*). Quay mặt phẳng (P_2) quanh Ox sao cho (P_2) trùng với (P_1), khi đó hai điểm A_1 và A_2 cùng thuộc mặt phẳng (P_1) (*H.3.11b*).

a) Nhận xét về vị trí của các điểm A_1, A_2 đối với đường thẳng Ox. Đường thẳng A_1A_2 có vuông góc với Ox hay không?

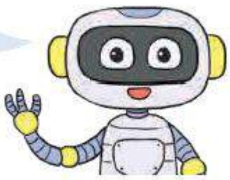
b) Hãy trình bày cách xác định điểm A khi biết các điểm A_1, A_2 trong mặt phẳng (P_1).



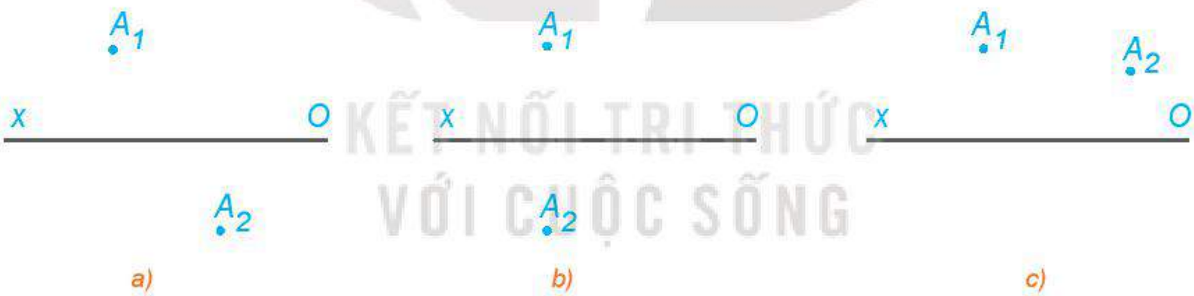
Hình 3.11

Một điểm trong không gian hoàn toàn được xác định nếu biết hai hình chiếu của điểm đó. Vì vậy, một vật thể hoàn toàn được xác định nếu biết hai hình chiếu của mỗi điểm thuộc vật thể đó.

Trong vẽ kĩ thuật, Hình 3.11*b* được gọi là đồ thức của điểm *A*. Khoảng cách từ điểm *A* đến hai mặt phẳng (P_1), (P_2) lần lượt được gọi là độ xa và độ cao của *A*.



Ví dụ 4. Trong Hình 3.12, hình nào thể hiện đúng hình chiếu đứng và hình chiếu bằng của một điểm *A* trong không gian?

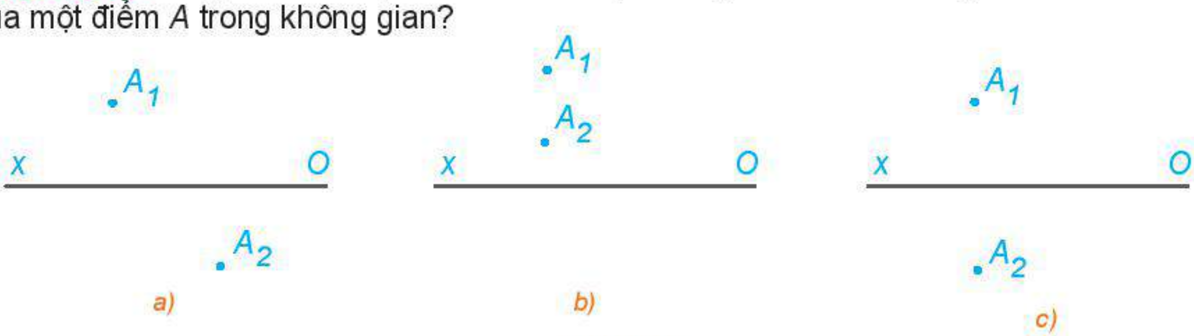


Hình 3.12

Giải

Nếu A_1 và A_2 là hình chiếu đứng và hình chiếu bằng của điểm *A* thì đường thẳng A_1A_2 vuông góc với *Ox*. Do đó chỉ có Hình 3.12*b* thể hiện đúng hai hình chiếu của điểm *A*.

Luyện tập 4. Trong Hình 3.13, hình nào thể hiện đúng hình chiếu đứng và hình chiếu bằng của một điểm *A* trong không gian?



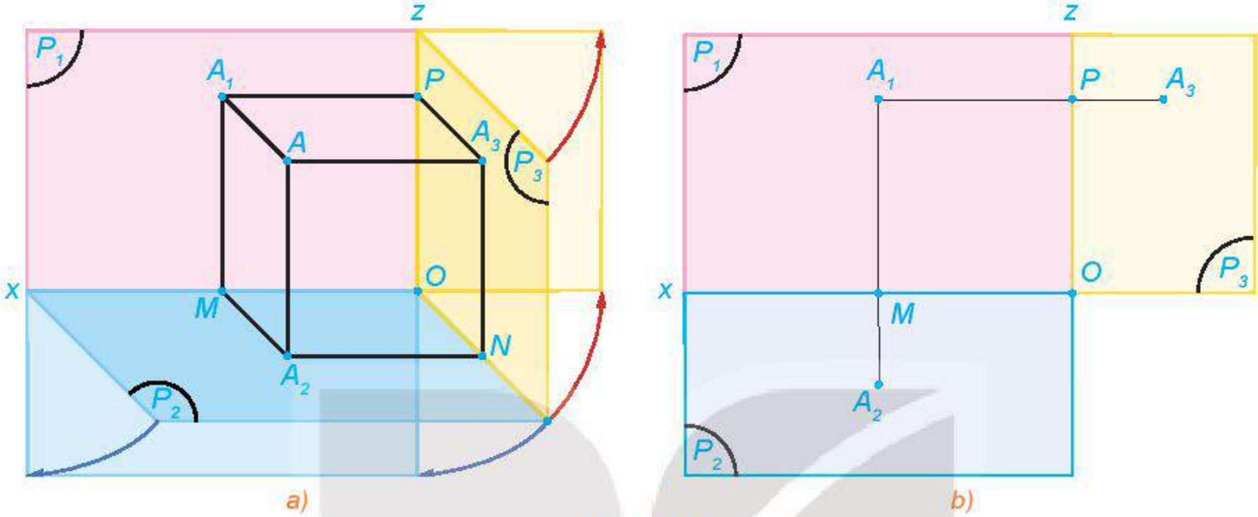
Hình 3.13

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

HĐ4. Trong HĐ2, gọi (P_3) là mặt phẳng hình chiếu cạnh và A_3 là hình chiếu cạnh của A. Gọi Oz là giao tuyến của (P_1) và (P_3), Oy là giao tuyến của (P_2) và (P_3). Quay mặt phẳng (P_2) quanh Ox sao cho (P_2) trùng với (P_1) và quay mặt phẳng (P_3) quanh Oz sao cho (P_3) trùng với (P_1), khi đó ba điểm A_1, A_2, A_3 cùng thuộc mặt phẳng (P_1) (H.3.14).

a) Đường thẳng A_1A_3 có vuông góc với đường thẳng Oz hay không? Khoảng cách từ A_3 đến Oz có bằng khoảng cách từ A_2 đến Ox hay không?

b) Trong mặt phẳng (P_1), trình bày cách xác định điểm A_3 khi biết hai điểm A_1, A_2.

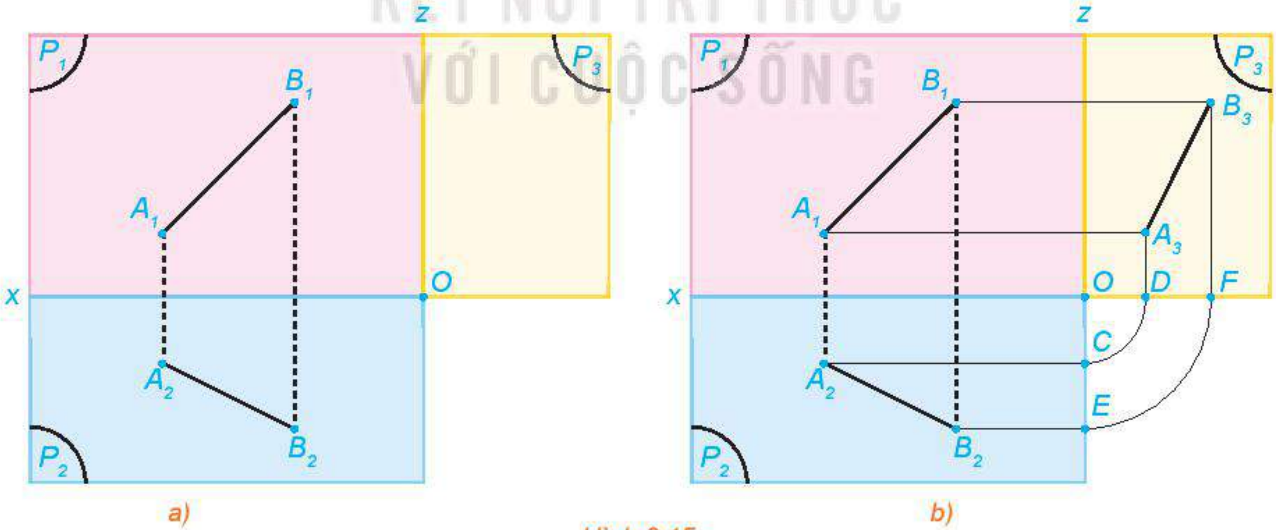


Hình 3.14

Trong mặt phẳng (P_1), một trong ba điểm A_1, A_2, A_3 hoàn toàn được xác định nếu biết hai điểm còn lại.

Ví dụ 5. Hình 3.15*a* thể hiện hình chiếu đứng và hình chiếu bằng của đoạn thẳng AB trong không gian. Xác định hình chiếu cạnh của đoạn thẳng đó.

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

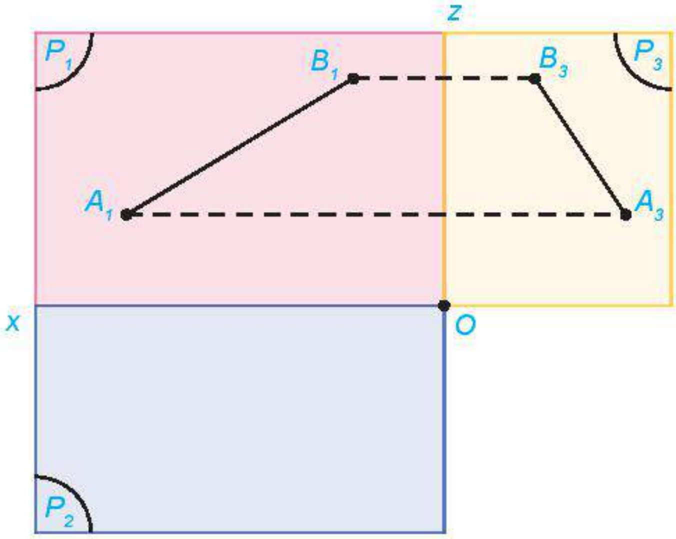


Hình 3.15

Giải

Hình chiếu cạnh của đoạn thẳng AB có hai đầu mút là hình chiếu cạnh A_3 của A và B_3 của B. Để xác định A_3 ta làm như sau: Qua điểm A_2 vẽ đường thẳng vuông góc với Oz tại C và trên Ox lấy điểm D sao cho $OC = OD$ (H.3.15*b*). Đường thẳng qua A_1 và vuông góc với Oz cắt đường thẳng qua D và vuông góc với Ox tại A_3. Tương tự xác định B_3. Nối A_3 và B_3 ta nhận được hình chiếu cạnh của đoạn thẳng AB.

Luyện tập 5. Hình 3.16 thể hiện hình chiếu đứng và hình chiếu cạnh của một đoạn thẳng AB trong không gian. Xác định hình chiếu bằng của đoạn thẳng đó.



Hình 3.16

Vận dụng 2. Dựa vào mối liên hệ giữa ba hình chiếu, giải thích cách bố trí các hình chiếu trên bản vẽ kĩ thuật. Vì sao đối với một số vật thể đơn giản, bản vẽ kĩ thuật chỉ thể hiện hai thay vì ba hình chiếu?

Ngày nay khi sử dụng các phần mềm đồ hoạ như AutoCAD, SketchUP, Photoshop... ta chỉ cần vẽ hai hình chiếu bất kì của vật thể, phần mềm sẽ phân tích, xử lí và cho ra hình chiếu còn lại.

4. HÌNH CHIẾU TRỤC ĐO

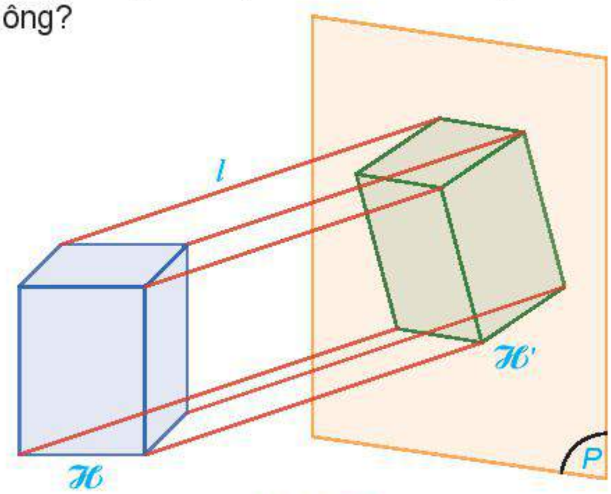
KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

HĐ5. Cho hình hộp chữ nhật $\mathscr{H}$. Quan sát hình chiếu song song $\mathscr{H}'$ của hình $\mathscr{H}$ lên mặt phẳng (P) theo phương l (H.3.16) và trả lời các câu hỏi sau:

a) Hình $\mathscr{H}'$ có phải là hình chiếu đứng, hình chiếu bằng hay hình chiếu cạnh của hình $\mathscr{H}$ hay không?

b) Phương chiếu l có song song với mặt nào của hình hộp chữ nhật $\mathscr{H}$ hay không?

Nhắc lại khái niệm hình chiếu đứng, hình chiếu bằng và hình chiếu cạnh.



Hình 3.17

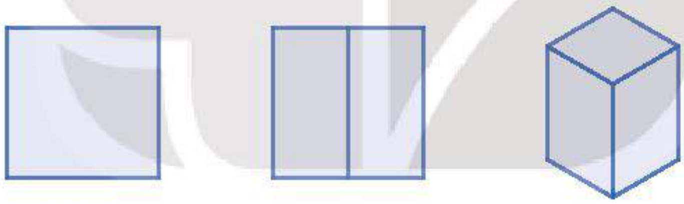
Hình chiếu song song của một hình $\mathcal{H}$ lên mặt phẳng (P) theo phương l không song song với bề mặt nào của hình $\mathcal{H}$ được gọi là hình chiếu trục đo của $\mathcal{H}$.

Tại sao hình chiếu trục đo thường thể hiện nhiều mặt của vật thể hơn so với hình chiếu vuông góc?

Nhận xét. Vì hình chiếu trục đo thường thể hiện được nhiều mặt của vật thể hơn so với hình chiếu vuông góc nên nó giúp người xem hình dung vật thể rõ ràng hơn. Trên thực tế, hầu hết các hình biểu diễn có tính lập thể (hay hình 3D) mà em đã từng gặp đều là hình chiếu trục đo (H.3.18).

Hình 3.18

Ví dụ 6. Trong các hình chiếu song song sau (H.3.19), hình nào là hình chiếu trục đo của một hình lập phương?



a) b) c)

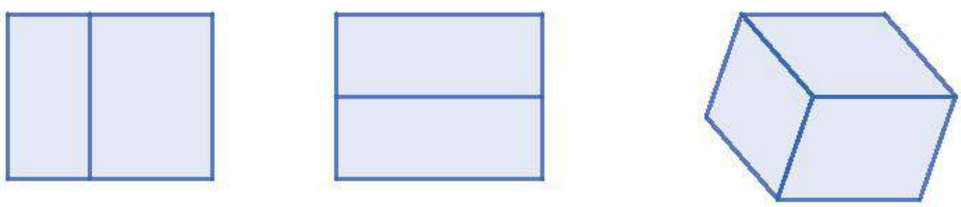
KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

Hình 3.19

Giải

Trong Hình 3.19*a* và 3.19*b* chỉ thấy được hai mặt của hình lập phương, tức là phép chiếu song song tương ứng có phương chiếu song song với ít nhất một mặt của hình lập phương. Vì vậy Hình 3.19*a* và 3.19*b* không là hình chiếu trục đo của hình lập phương. Trong Hình 3.19*c* có thể thấy được cả ba mặt của hình lập phương nên hình này là hình chiếu trục đo của hình lập phương.

Luyện tập 6. Trong các hình chiếu song song sau (H.3.20), hình nào thể hiện đúng hình chiếu trục đo của một hình hộp chữ nhật?



a) b) c)

Hình 3.20

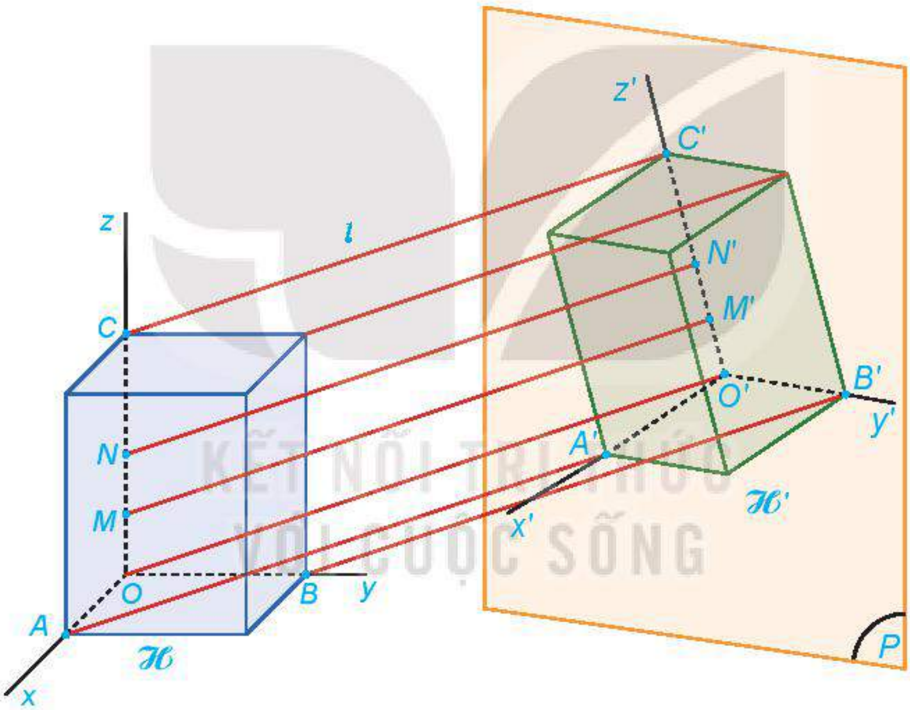
Vận dụng 3. Xoay một hình lập phương để có thể quan sát được cả ba mặt của nó. Khi đó các phần quan sát được của hình lập phương có tạo thành hình chiếu trục đo của nó hay không? Hãy giải thích tại sao.

HĐ6. Giả sử hình hộp chữ nhật $\mathscr{H}$ trong **HĐ1** được gắn thêm các trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc dọc theo chiều dài, chiều rộng và chiều cao của $\mathscr{H}$. Gọi $O'x'$, $O'y'$ và $O'z'$ lần lượt là hình chiếu của các trục đó lên mặt phẳng (P) theo phương l (H.3.21).

Nhắc lại tính chất bảo toàn tỉ số độ dài đoạn thẳng của phép chiếu song song.

a) Hình chiếu của các góc $\widehat{xOy}$, $\widehat{yOz}$, $\widehat{zOx}$ là các góc nào trên mặt phẳng hình chiếu?

b) Giả sử M, N là hai điểm thuộc trục Oz và M', N' là hình chiếu tương ứng thuộc trục $O'z'$. So sánh hai tỉ số $\frac{O'M'}{OM}$ và $\frac{O'N'}{ON}$.



Hình 3.21

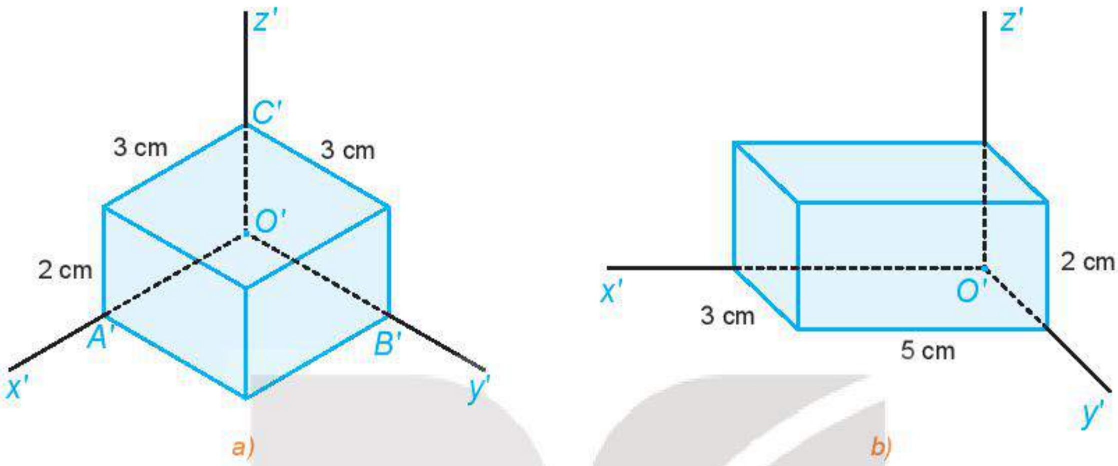
Cho hình $\mathscr{H}$ và các trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc được đặt dọc theo ba chiều của hình $\mathscr{H}$.

- Hình chiếu $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ của các trục Ox, Oy, Oz được gọi là các trục đo.
- Các góc $\widehat{x'O'y'}$, $\widehat{y'O'z'}$, $\widehat{z'O'x'}$ được gọi là các góc trục đo.
- Hệ số biến dạng theo mỗi trục là tỉ số độ dài hình chiếu của một đoạn thẳng nằm trên trục đó hoặc song song với trục đó với độ dài thực tế của đoạn thẳng đó.

Trong Hình 3.26, các tỉ số $p = \frac{O'A'}{OA}$, $q = \frac{O'B'}{OB}$ và $r = \frac{O'C'}{OC}$ lần lượt được gọi là hệ số biến dạng theo trục $O'x'$, $O'y'$ và $O'z'$.

Chú ý. Hệ số biến dạng trên mỗi trục đo phụ thuộc vào vị trí tương đối của mỗi trục với mặt phẳng chiếu và phụ thuộc vào phương chiếu. Mục 2 của bài này sẽ trình bày một phép chiếu trục đo đặc biệt mà ở đó các hệ số biến dạng được lựa chọn để thuận tiện cho việc vẽ hình chiếu trục đo của vật thể.

Ví dụ 7. Cho một hình lập phương có độ dài mỗi cạnh là 6 cm. Hình chiếu trục đo của hình lập phương được cho như trong Hình 3.22*a*. Tính hệ số biến dạng theo mỗi trục đo.



Hình 3.22

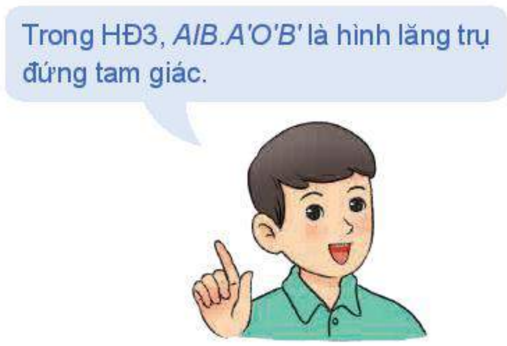
Giải

Gọi O, A, B, C là các đỉnh của hình lập phương có hình chiếu lần lượt là O', A', B', C'. Khi đó $OA = OB = OC = 6$ cm và các hệ số biến dạng lần lượt là $p = \dfrac{O'A'}{OA} = \dfrac{3}{6} = 0,5$; $q = \dfrac{O'B'}{OB} = \dfrac{3}{6} = 0,5$ và $r = \dfrac{O'C'}{OC} = \dfrac{2}{6} \approx 0,33$.

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

Luyện tập 7. Hình chiếu trục đo của một hình hộp chữ nhật được cho như trong Hình 3.21*b*. Biết các hệ số biến dạng là $p = 1$, $q = r = 0,5$. Tính kích thước thực tế của hình hộp chữ nhật đó.

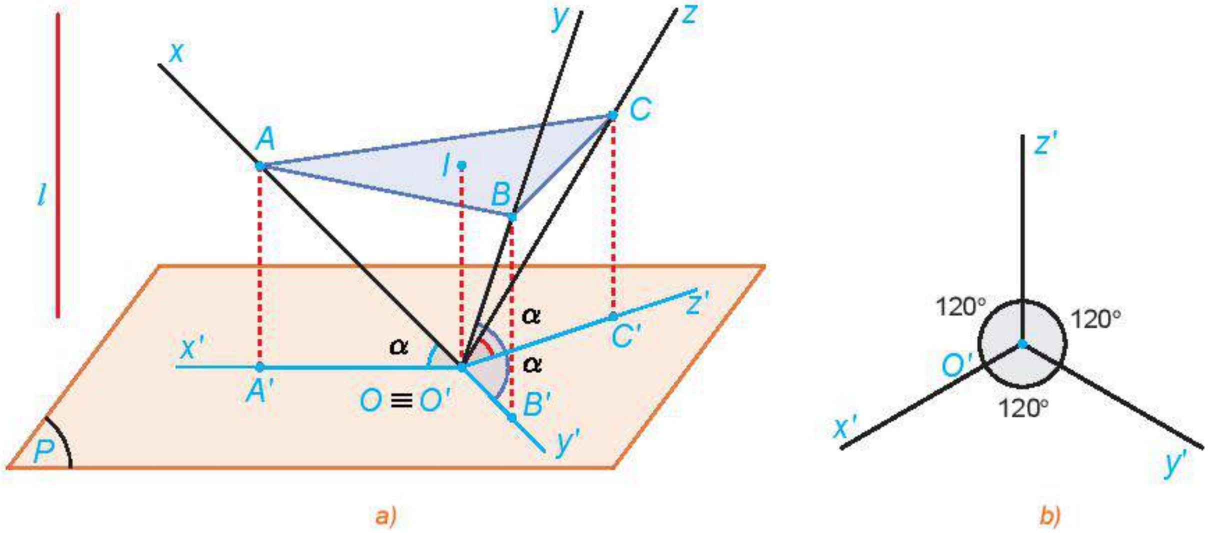
HĐ7. Cho hình tứ diện vuông $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC bằng nhau và lần lượt nằm trên các trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc. Xét phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P) đi qua O sao cho các trục Ox, Oy, Oz tạo với (P) các góc bằng nhau (H.3.22*a*). Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu của A, B, C.



a) Chứng minh rằng ABC là tam giác đều.

b) Giải thích tại sao các khoảng cách từ A, B, C đến (P) bằng nhau, từ đó suy ra mặt phẳng (ABC) song song với mặt phẳng (P).

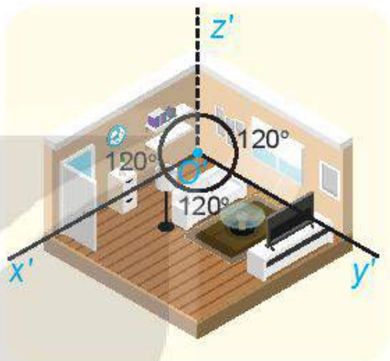
c) Gọi I là tâm tam giác đều ABC. Giải thích tại sao $\widehat{A'O'B'} = \widehat{AIB}$, từ đó suy ra $\widehat{A'O'B'} = \widehat{B'O'C'} = \widehat{A'O'C'} = 120°$.



Hình 3.23

Trong hình chiếu trục đo vuông góc đều có:

- Mặt phẳng chiếu (P) vuông góc với phương chiếu l;
- Các góc trục đo đều bằng 120° (H.3.23b);
- Các hệ số biến dạng đều bằng 1.



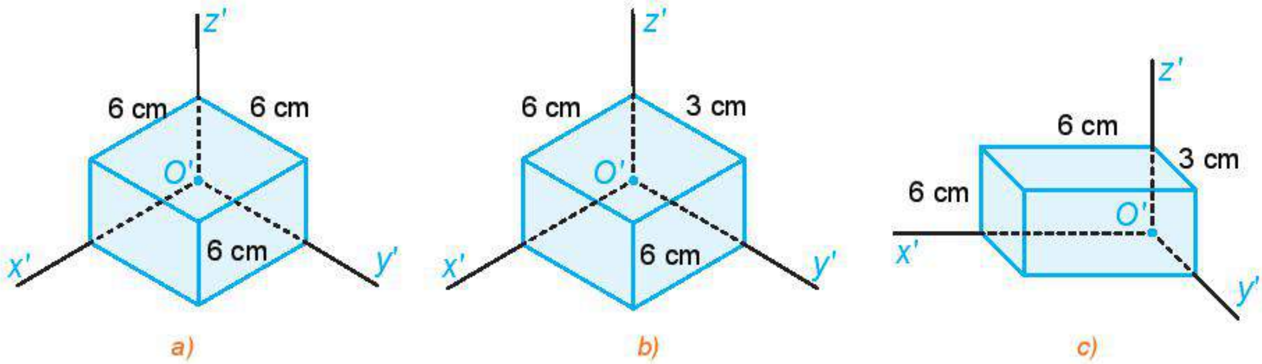
Một mô hình phòng khách được biểu diễn bằng hình chiếu trục đo

Hãy quan sát hình ảnh mở đầu (H.3.1) và cho biết hình nào là hình chiếu trục đo vuông góc đều của vật thể.

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

Nhận xét. Trong **HĐ7**, ta có thể chứng minh được $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0{,}82$ (xem bài tập 3.10) và do đó các hệ số biến dạng theo các trục bằng 0,82. Tuy nhiên, để thuận tiện cho việc tính toán và vẽ hình, ta thường quy ước các hệ số biến dạng bằng 1.

Ví dụ 8. Cho một hình lập phương có độ dài mỗi cạnh là 6 cm. Hình nào trong Hình 3.26 thể hiện đúng hình chiếu trục đo vuông góc đều của hình lập phương đó?

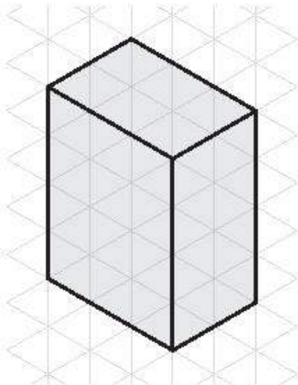


Hình 3.24

Giải

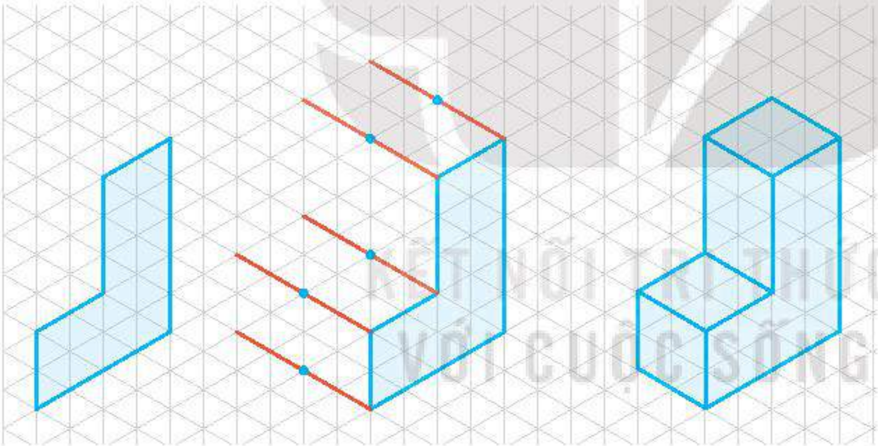
Hình 3.24*c* có các góc trục đo khác 120° nên không là hình chiếu trục đo vuông góc đều. Hình 3.24*b* là hình chiếu trục đo vuông góc đều nhưng không thể hiện đúng kích thước của hình lập phương. Chỉ có Hình 3.24*a* là hình chiếu trục đo vuông góc đều và thể hiện đúng kích thước của hình lập phương.

Luyện tập 8. Hình chiếu trục đo của một hình hộp chữ nhật được vẽ trên giấy kẻ ô tam giác đều như trong Hình 3.25. Quy ước độ dài mỗi cạnh của tam giác đều là 10 mm, xác định kích thước mỗi chiều của hình hộp đó.

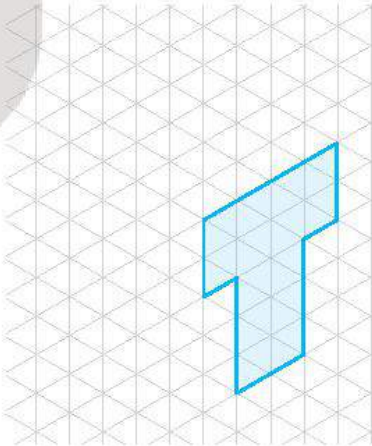


Hình 3.25

Vận dụng 4. Hình 3.26*a* thể hiện cách vẽ dạng nổi của chữ cái "L" trên giấy kẻ ô tam giác đều. Hình nhận được là một hình chiếu trục đo vuông góc đều. Bằng cách tương tự hãy vẽ dạng nổi của chữ cái "T" (H.3.26*b*).



Hình 3.26a



Hình 3.26b

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

BÀI TẬP

3.1. Trong các khẳng định sau, những khẳng định nào là đúng?

a) Hình chiếu đứng của một hình $\mathscr{H}$ là hình chiếu song song của hình $\mathscr{H}$ lên một mặt phẳng nào đó.

b) Hình chiếu đứng và hình chiếu bằng nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau.

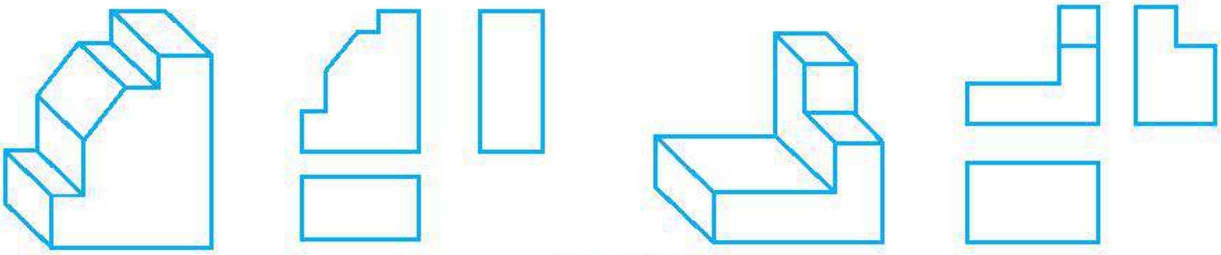
c) Hình chiếu cạnh của một đường thẳng luôn là một đường thẳng.

d) Hình chiếu bằng của hai điểm phân biệt luôn là hai điểm phân biệt.

3.2. Cho ví dụ về một vật thể có cả ba hình chiếu vuông góc là:

a) hình chữ nhật; b) hình tròn.

3.3. Trên hình chiếu của mỗi vật thể (H.3.27) còn thiếu một số nét. Bổ sung các nét còn thiếu đó.



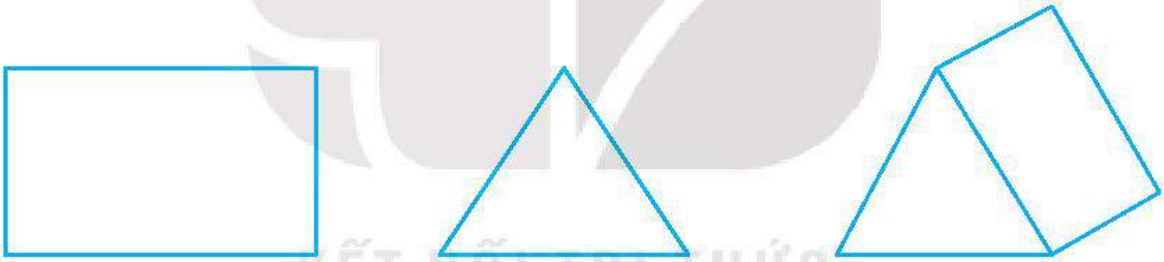
Hình 3.27

3.4. Bạn Hoàng nói rằng, "hình chiếu đứng của một đoạn thẳng luôn có độ dài lớn hơn độ dài của đoạn thẳng đó". Bạn Hoàng nói đúng hay sai? Vì sao?

3.5. Khi nào thì hình chiếu đứng của một đoạn thẳng AB là một điểm? Khi nào thì hình chiếu bằng của một đoạn thẳng AB là một điểm?

3.6. Cho đoạn thẳng AB và gọi A_1B_1 là hình chiếu đứng của AB. Biết đường thẳng AB song song với mặt phẳng hình chiếu đứng, chứng minh rằng $AB = A_1B_1$.

3.7. Trong các hình của Hình 3.28, hình nào là hình chiếu trục đo của hình lăng trụ tam giác?

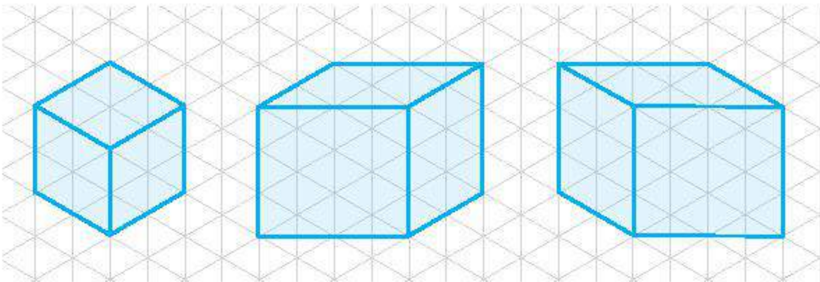


a) b) c)

Hình 3.28

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

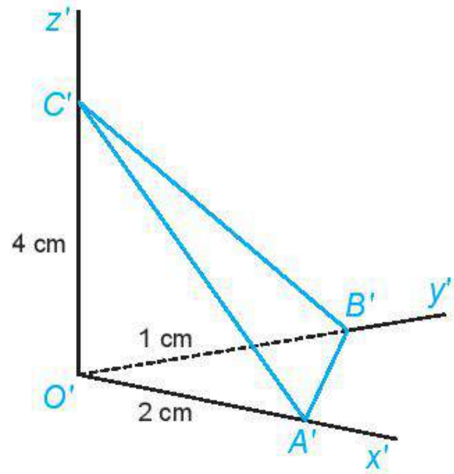
3.8. Trong các hình của Hình 3.29, hình nào là hình chiếu trục đo vuông góc đều của một hình lập phương? Giải thích vì sao.



a) b) c)

Hình 3.29

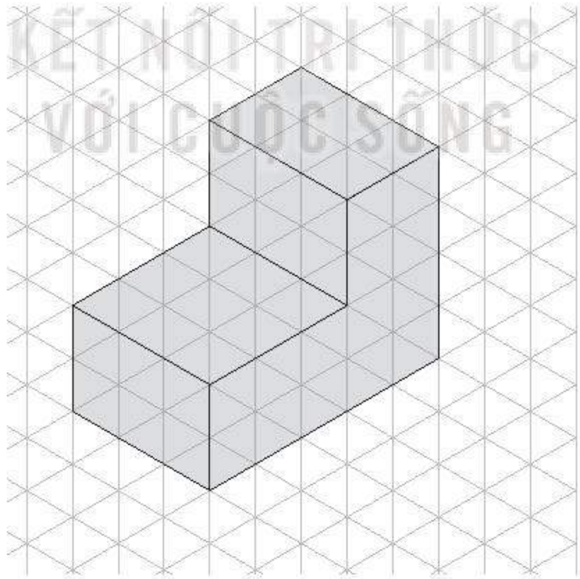
3.9. Cho hình tứ diện $OABC$ có $OA = 2$ cm, $OB = 3$ cm và $OC = 6$ cm. Hình chiếu trục đo của hình tứ diện được cho như trong Hình 3.30. Tính hệ số biến dạng theo mỗi trục đo.



Hình 3.30

3.10. Trong **HĐ3**, bằng cách xét tam giác vuông OIA và tính tỉ số $\frac{IA}{OA}$, chứng minh rằng trong phép chiếu trục đo vuông góc đều thì $p = q = r = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

3.11. Hình chiếu trục đo của một vật thể được vẽ trên giấy kẻ ô tam giác đều như trong Hình 3.31. Quy ước độ dài mỗi cạnh của tam giác đều là 10 cm, tính thể tích của vật thể đó.

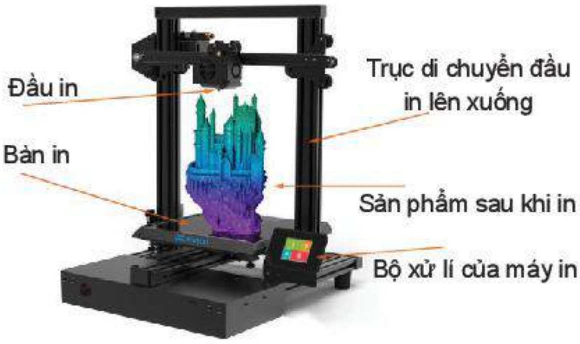


Hình 3.31

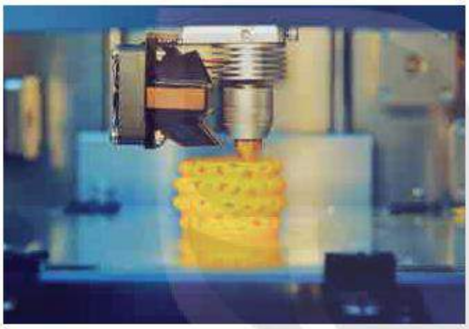
KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

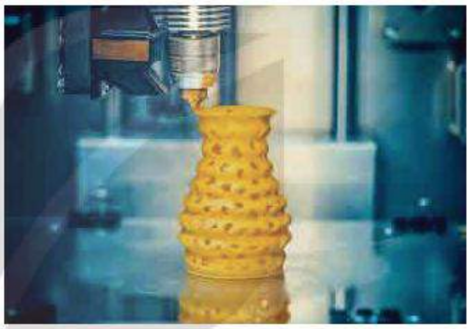
Em có biết?

Công nghệ in 3D đã được phát triển và áp dụng vào thực tế từ những năm 1980 bởi Charles Hull. Để in 3D, phần mềm của máy in sẽ phân tách vật thể thành các lớp chồng lên nhau, sau đó tính toán đường chạy cho đầu in để in từng lớp. Hết một lớp in, đầu in sẽ dịch chuyển lên trên để in lớp tiếp theo. Làm thế nào để phần mềm máy in 3D thực hiện được điều đó?

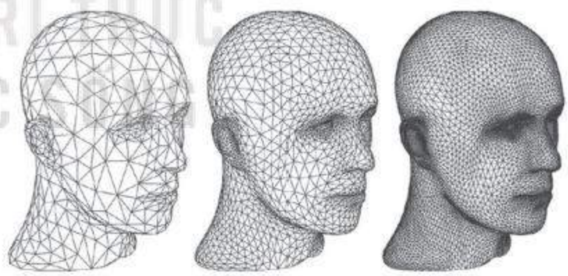


Máy in 3D





Quá trình in từng lớp của vật thể



Bề mặt một vật thể được mã hoá bởi các lưới tam giác có độ phân giải tăng dần

Bắt đầu từ bản vẽ kĩ thuật của vật thể, các phần mềm đồ hoạ sẽ dựng lên hình ảnh ba chiều của vật thể cần in. Hình ảnh này thường được lưu trữ ở dạng tệp STL (Standard Triangle Language) cho phép mã hoá bề mặt của vật thể dưới dạng một "lưới tam giác". Phần mềm của máy in 3D khi nhận tệp STL có thể phân tích "lưới tam giác" này để chia vật thể thành các lớp; độ phân giải của "lưới tam giác" càng cao, tức là kích thước của mỗi tam giác trong lưới càng nhỏ, thì mỗi lớp in càng mỏng và do đó sản phẩm sau khi in càng mịn.

(Theo *www.sculpteo.com*)

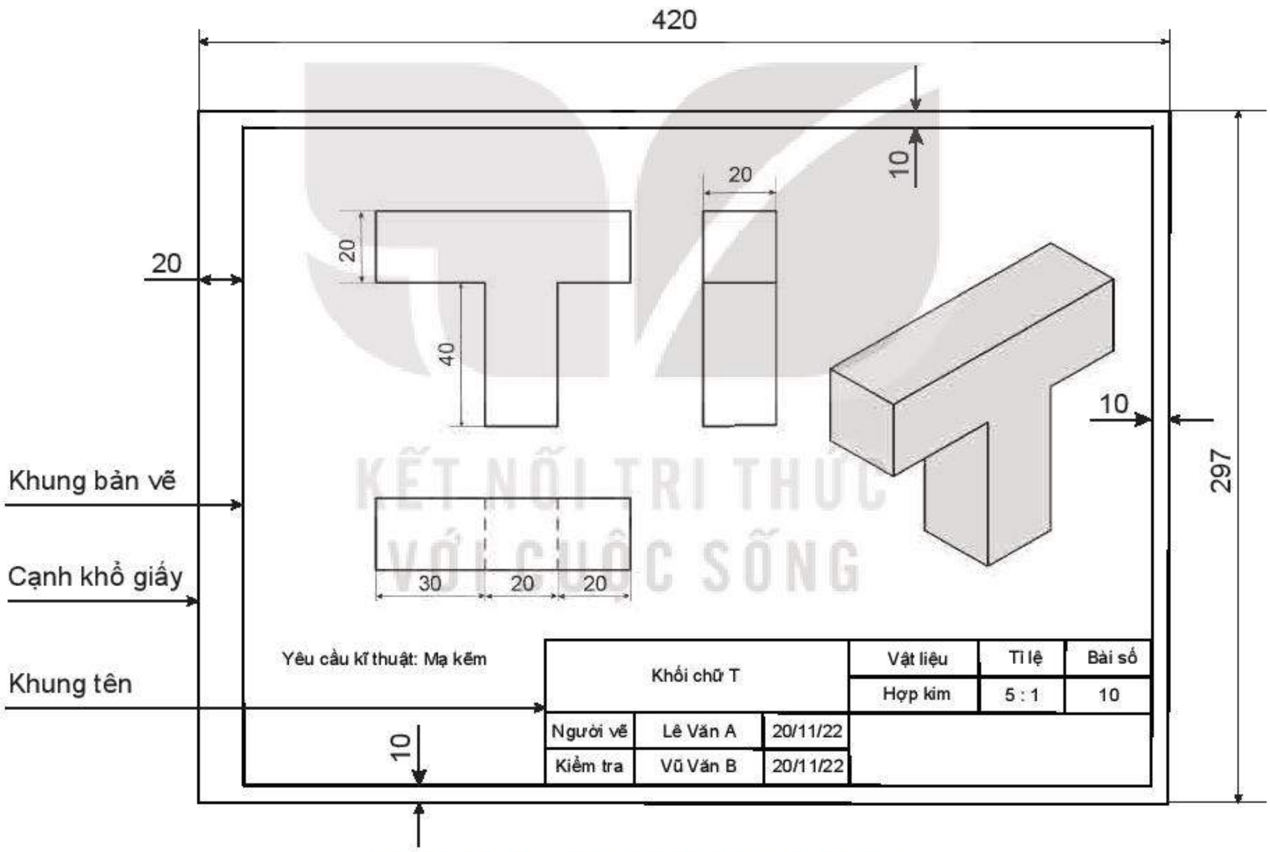
KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

Bài 12 BẢN VẼ KĨ THUẬT

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

- Nhận biết được nguyên tắc cơ bản trong vẽ kĩ thuật.
- Đọc được thông tin từ một số bản vẽ kĩ thuật đơn giản.
- Vẽ được bản vẽ kĩ thuật đơn giản.

Bản vẽ kĩ thuật của một vật thể là tài liệu mô tả chính xác hình dạng, kết cấu và kích thước của vật thể đó. Bản vẽ kĩ thuật cần tuân thủ các nguyên tắc nào? Làm thế nào để đọc được thông tin từ một bản vẽ kĩ thuật và lập một bản vẽ kĩ thuật đơn giản?



KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

Hình 3.32. Bản vẽ kĩ thuật của một chi tiết máy

1. MỘT SỐ TIÊU CHUẨN CỦA BẢN VẼ KĨ THUẬT

Bản vẽ kĩ thuật đều có khung bản vẽ, khung tên và luôn được vẽ trên một khổ giấy nhất định. Kích thước của các khổ giấy chính được cho như trong bảng dưới đây.

Khổ giấy	A0	A1	A2	A3	A4
Kích thước (mm x mm)	1 189 × 841	841 × 594	594 × 420	420 × 297	297 × 210

HĐ1. Quan sát bản vẽ kĩ thuật trong Hình 3.32 và trả lời các câu hỏi sau.

a) Bản vẽ kĩ thuật được vẽ trên khổ giấy nào?

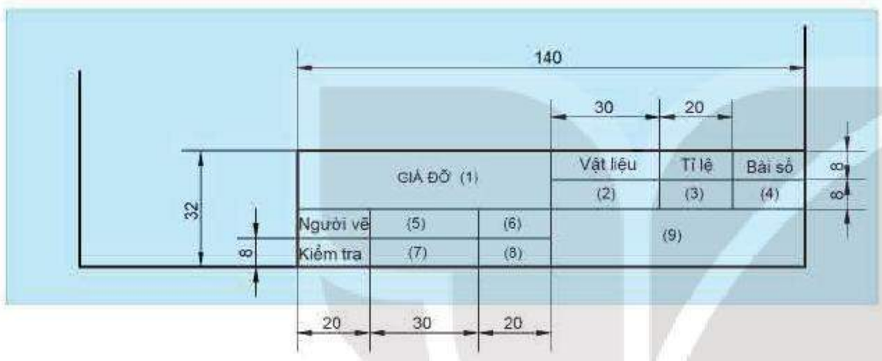
b) Các cạnh của khung bản vẽ cách các cạnh của khổ giấy bao nhiêu milimét?

c) Khung tên được đặt ở vị trí nào của bản vẽ và trình bày những thông tin cơ bản nào?

> Mỗi bản vẽ đều có khung bản vẽ, khung tên. Khung bản vẽ cách cạnh trái của khổ giấy là 20 mm và cách các cạnh còn lại là 10 mm. Khung tên ghi các nội dung về quản lí bản vẽ và được đặt ở góc dưới bên phải của bản vẽ.

Chú ý

– Kích thước và nội dung khung tên của bản vẽ ở trường phổ thông được cho như trong Hình 3.33. Nội dung cụ thể của các ô trong khung tên như sau: (1) Tên vật thể/đề bài tập; (2) Tên vật liệu; (3) Tỉ lệ của bản vẽ; (4) Kí hiệu số bài tập; (5) Họ, tên người vẽ; (6) Ngày lập bản vẽ; (7) Chữ kí của người kiểm tra; (8) Ngày kiểm tra; (9) Tên trường, lớp.

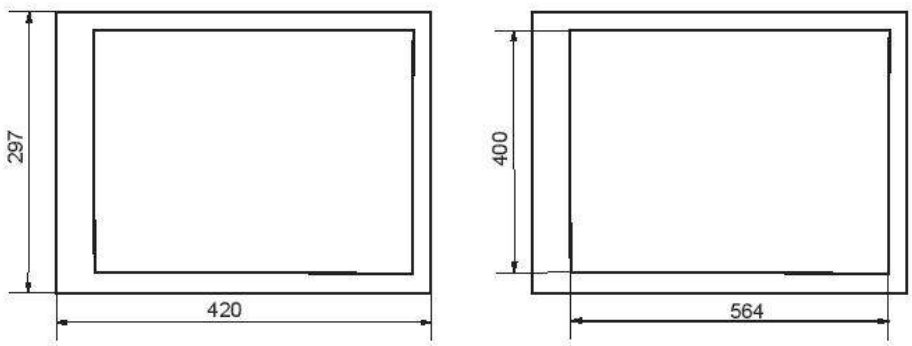


Hình 3.33

– Tỉ lệ ghi ở ô số (3) là tỉ số giữa kích thước đo được trên bản vẽ và kích thước thực của vật thể đó, vì vậy tỉ lệ giúp người đọc bản vẽ ước lượng được kích thước thực của vật thể. Một số tỉ lệ hay sử dụng được cho trong bảng sau.

Thu nhỏ	1 : 2	1 : 5	1 : 10	1 : 20	1 : 50
Nguyên hình	1 : 1				
Phóng to	2 : 1	5 : 1	10 : 1	20 : 1	50 : 1

Ví dụ 1. Một bản vẽ kĩ thuật được vẽ trên khổ giấy A3 như trong Hình 3.34*a*. Xác định kích thước khung bản vẽ của bản vẽ đó.



a) *b)*

Hình 3.34

Giải

Khổ giấy A3 có chiều dài là 420 mm và chiều rộng là 297 mm. Do đó chiều dài của khung bản vẽ là 420 – 20 – 10 = 390 mm và chiều rộng là 297 – 10 – 10 = 277 mm.

Luyện tập 1. Hình 3.34*b* thể hiện một bản vẽ kĩ thuật có kích thước khung bản vẽ là 564mm x 400 mm. Hỏi bản vẽ đó được vẽ trên khổ giấy nào?

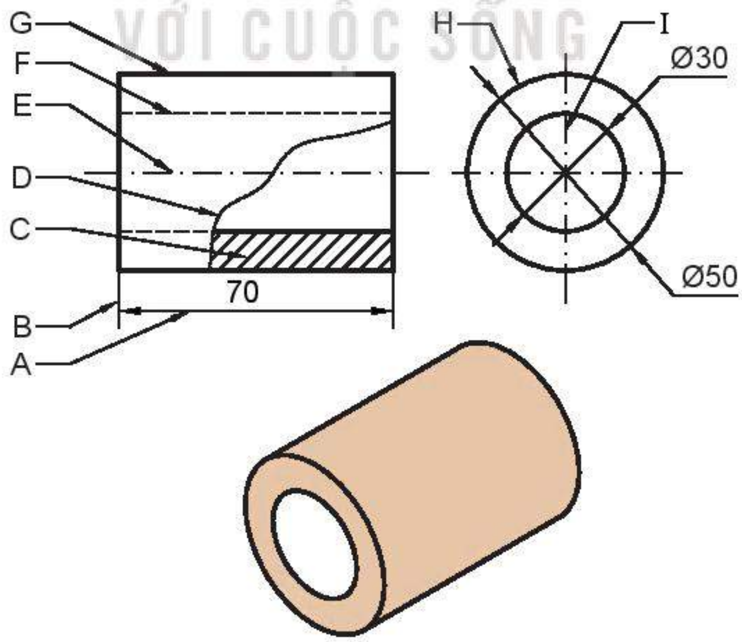
HĐ2. Quan sát bản vẽ kĩ thuật trong Hình 3.32 và cho biết trên bản vẽ đó có những loại nét vẽ nào? Chiều rộng (hay độ dày) của các nét vẽ đó có giống nhau không?

Các loại nét vẽ thường dùng được cho trong bảng sau và minh hoạ bởi Hình 3.35.

Tên gọi	Hình dạng	Ứng dụng
Nét liền đậm		Đường bao thấy, cạnh thấy (G), (H)
Nét liền mảnh		Đường kích thước (A), đường dóng (B), đường gạch gạch trên mặt cắt (C)
Nét đứt mảnh	12d 3d	Đường bao khuất, cạnh khuất (F)
Nét lượn sóng		Đường giới hạn hình cắt (D)
Nét gạch dài chấm mảnh	24d 6d	Đường tâm, đường trục đối xứng (E), (I)

Trong bảng trên, d là chiều rộng của nét vẽ và thường được chọn trong dãy kích thước: 0,13; 0,18; 0,25; 0,35; 0,5; 0,7; 1,4; 2 (mm).

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG



Hình 3.35

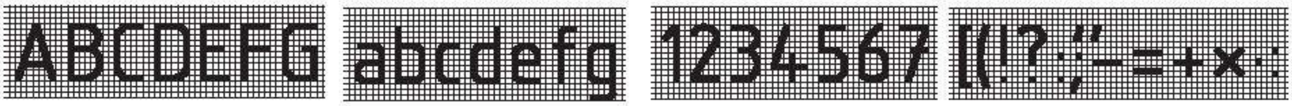
Ví dụ 2. Trên bản vẽ kĩ thuật ở Hình 3.32 có bao nhiêu nét đứt mảnh? Các nét đứt mảnh đó thể hiện đường bao khuất hay cạnh khuất nào?

Giải

Bản vẽ kĩ thuật ở Hình 3.32*a* có hai nét đứt mảnh. Hai nét đứt mảnh này thể hiện hai cạnh bị che khuất ở phần dưới của khối chữ T.

Luyện tập 2. Trên bản vẽ kĩ thuật ở Hình 3.32 có bao nhiêu nét liền mảnh?

Chú ý. Ngoài các quy ước về nét vẽ, bản vẽ kĩ thuật còn có các quy ước về chữ viết. Cụ thể, mỗi chữ cái, chữ số hay kí tự tuân theo một khổ chữ nhất định: khổ chữ được xác định bằng chiều cao *h* của chữ hoa; chiều rộng của nét chữ thường lấy bằng 1/10 *h* (H.3.36).



Hình 3.36. Một số chữ viết, chữ số và kí tự kiểu đứng

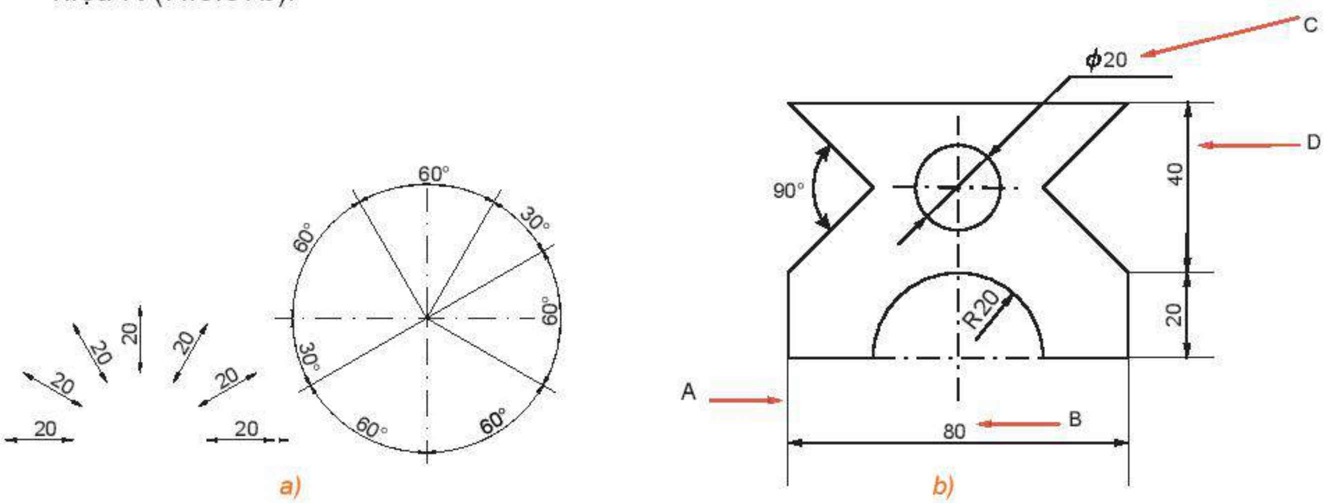
HĐ2. Quan sát bản vẽ kĩ thuật trong Hình 3.32 và cho biết các kích thước được viết ở vị trí nào của đường kích thước.

Nhận xét.

– Đường kích thước được vẽ bằng nét liền mảnh và thường song song với kích thước được viết. Ở đầu mút của đường kích thước có vẽ mũi tên.

– Đường dóng kích thước được vẽ bằng nét liền mảnh và vượt quá đường kích thước từ 2 mm đến 4 mm. Đường dóng kích thước thường được vẽ vuông góc với đường kích thước.

– Vị trí của chữ số kích thước phụ thuộc vào đường kích thước và được viết theo hướng dẫn trong Hình 3.37*a*. Trước chữ số kích thước thể hiện đường kính của đường tròn, viết kí hiệu ϕ (đọc là "phi"), trước chữ số kích thước thể hiện bán kính của cung tròn, viết kí hiệu R (H.3.37*b*).



Hình 3.37

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

Ví dụ 3. Hình 3.37*b* thể hiện một phần bản vẽ kĩ thuật. Trong hai kí hiệu A, B, kí hiệu nào ứng với đường dóng kích thước và kí hiệu nào ứng với chữ số kích thước?

Giải

Kí hiệu A ứng với đường dóng kích thước và kí hiệu B ứng với chữ số kích thước.

Luyện tập 3. Trong Hình 3.37*b*, kí hiệu nào trong hai kí hiệu C, D ứng với đường kích thước và kí hiệu nào ứng với chữ số kích thước?

2. NGUYÊN TẮC CƠ BẢN TRONG VẼ KĨ THUẬT

HĐ4. Quan sát bản vẽ kĩ thuật trong Hình 3.32 và trả lời các câu hỏi sau:

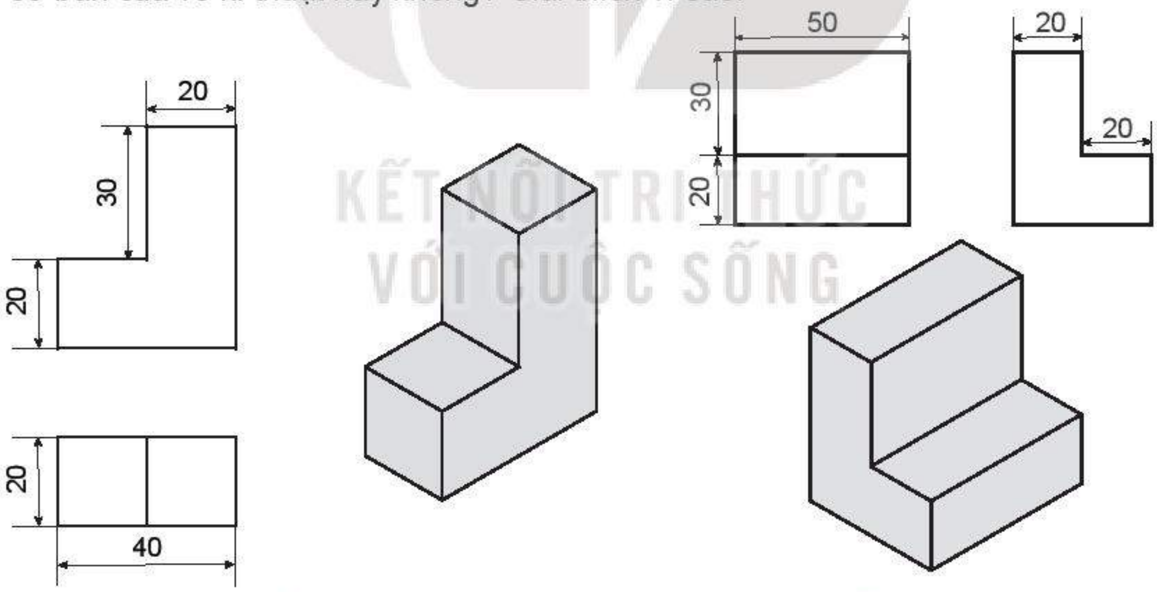
a) Các hình biểu diễn trong bản vẽ có giúp hình dung được hình dạng và cấu tạo của vật thể hay không?

b) Có kích thước nào của vật thể mà em không thể xác định được từ bản vẽ hay không?

Bản vẽ kĩ thuật cần đảm bảo các nguyên tắc cơ bản sau:

- Nguyên tắc phản chuyển: các hình biểu diễn trên bản vẽ kĩ thuật xác định duy nhất hình dạng và cấu tạo của vật thể được biểu diễn.
- Nguyên tắc đầy đủ: các kích thước của vật thể được biểu diễn đầy đủ trên bản vẽ kĩ thuật.

Ví dụ 4. Hình 3.38*a* thể hiện một phần của bản vẽ. Bản vẽ đó có đáp ứng được các nguyên tắc cơ bản của vẽ kĩ thuật hay không? Giải thích vì sao.



a) *b)*

Hình 3.38

Giải

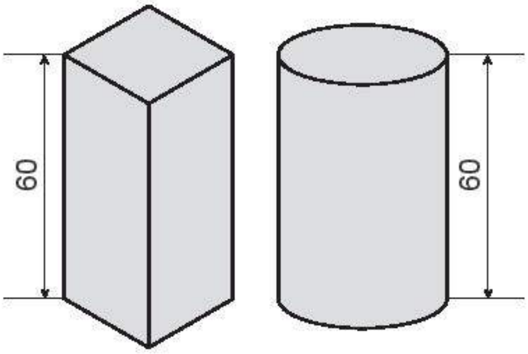
Bản vẽ trong Hình 3.38*a* thể hiện duy nhất vật thể cần được biểu diễn, đồng thời các kích thước của vật thể có thể được xác định đầy đủ từ bản vẽ. Do đó bản vẽ trong Hình 3.33*a* đáp ứng được các nguyên tắc cơ bản của vẽ kĩ thuật.

Luyện tập 4. Hình 3.38*b* thể hiện một phần của bản vẽ. Bản vẽ đó có đáp ứng được các nguyên tắc cơ bản của vẽ kĩ thuật hay không? Giải thích vì sao.

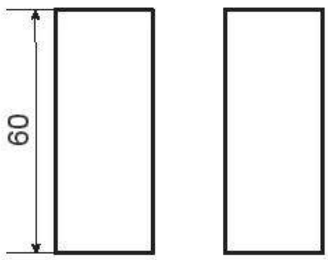
KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

Nhận xét. Bản vẽ kĩ thuật không nhất thiết phải thể hiện đầy đủ cả ba hình chiếu vuông góc, hoặc phải thể hiện đầy đủ cả hình chiếu vuông góc và hình chiếu trục đo của vật thể. Đối với một số vật thể đơn giản thì 2 hoặc 3 hình chiếu là đủ để giúp người đọc bản vẽ hình dung đầy đủ về vật thể.

Ví dụ 5. Hãy quan sát một hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông và một hình trụ có chiều cao bằng nhau (H.3.39*a*), từ đó giải thích vì sao hình biểu diễn được thể hiện trong Hình 3.39*b* không đáp ứng nguyên tắc phản chuyển trong vẽ kĩ thuật.



a)



b)

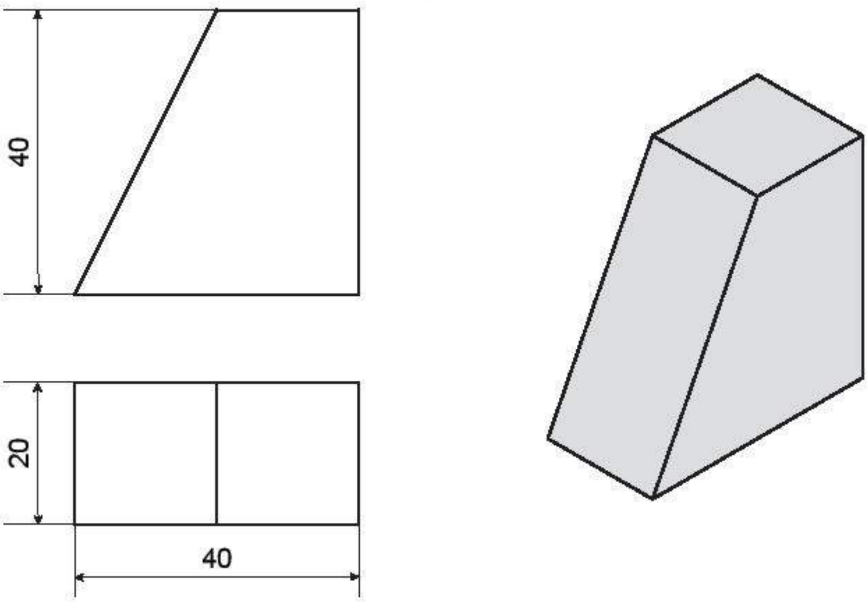
Hình 3.39

Giải

Hình hộp chữ nhật và hình trụ với chiều cao 60 mm trong Hình 3.39*a* đều có hình chiếu đứng và hình chiếu cạnh được thể hiện như trong bản vẽ ở Hình 3.39*b*. Do đó bản vẽ trong Hình 3.39*b* không xác định duy nhất vật thể được biểu diễn và vì vậy không đáp ứng nguyên tắc phản chuyển.

Để phân biệt hình hộp chữ nhật và hình trụ trong Hình 3.39*a* ta nên sử dụng thêm hình chiếu gì?

Luyện tập 5. Một phần của bản vẽ được thể hiện trong Hình 3.40. Bản vẽ đó có đáp ứng nguyên tắc đầy đủ trong vẽ kĩ thuật không?



Hình 3.40

3. ĐỌC VÀ VẼ BẢN VẼ KĨ THUẬT ĐƠN GIẢN

HĐ5. Quan sát bản vẽ kĩ thuật trong Hình 3.32 và trả lời các câu hỏi sau:

a) Vật thể được biểu diễn trên bản vẽ có tên gọi là gì?

b) Bản vẽ thể hiện các hình chiếu nào của vật thể?

c) Em xác định chiều cao của vật thể từ bản vẽ bằng cách nào?

Khi đọc thông tin từ bản vẽ kĩ thuật ta tuân theo trình tự sau:

- Khung tên: xác định tên gọi của vật thể, vật liệu sử dụng để chế tạo vật thể, tỉ lệ bản vẽ.
- Hình biểu diễn: xác định tên gọi của các hình chiếu có trong bản vẽ và các hình biểu diễn khác (nếu có).
- Kích thước: xác định kích thước chung của vật thể và kích thước các thành phần.
- Yêu cầu kĩ thuật: xác định yêu cầu về gia công, xử lí bề mặt của vật thể.

Ví dụ 6. Đọc bản vẽ kĩ thuật trong Hình 3.41*a*.

Giải

Bản vẽ kĩ thuật trong Hình 3.41*a* cho ta các nội dung sau đây.

– Khung tên:

+ Tên gọi vật thể: lăng trụ tam giác đều;

+ Vật liệu: sắt;

+ Tỉ lệ: 1:5.

– Hình biểu diễn:

+ Tên gọi hình chiếu: hình chiếu đứng, hình chiếu bằng, hình chiếu cạnh và hình chiếu trục đo vuông góc đều.

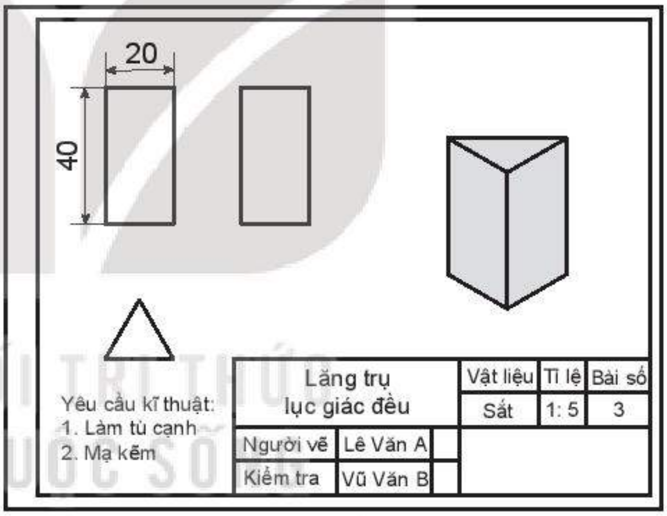
– Kích thước:

+ Vật thể có kích thước chung là: cao 40, ngang 20.

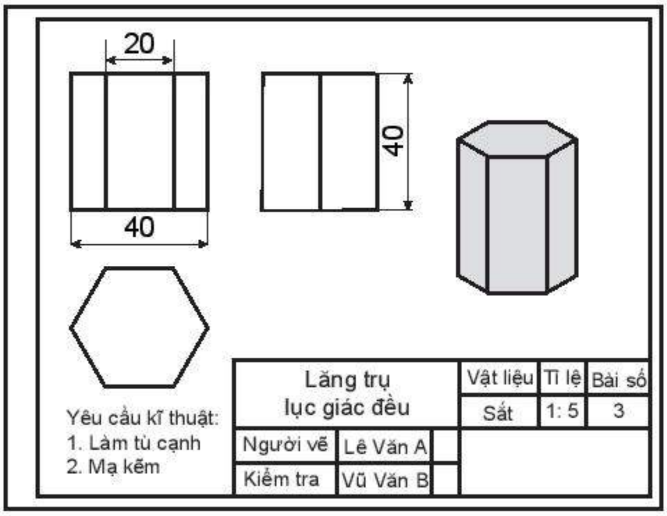
– Yêu cầu kĩ thuật:

+ Gia công: làm tù cạnh;

+ Xử lí bề mặt: mạ kẽm



a)



b)

Hình 3.41

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

Luyện tập 6. Đọc bản vẽ kĩ thuật trong Hình 3.41*b*.

Chú ý. Thông thường trong bản vẽ kĩ thuật, hình chiếu trục đo giúp hình dung hình dạng tổng thể của vật thể, hình chiếu vuông góc giúp hình dung cấu tạo và kích thước chi tiết của vật thể.

Vận dụng. Một nhà máy dự định sử dụng 1 tấn hợp kim để sản xuất các chi tiết máy được mô tả như trong bản vẽ kĩ thuật ở Hình 3.30. Tính số lượng chi tiết máy sản xuất được, biết rằng khối lượng riêng của hợp kim là 7,85 tấn/m^3 và giả sử rằng lượng hợp kim hao hụt trong sản xuất là không đáng kể.

HĐ6. Để lập bản vẽ kĩ thuật gồm các hình chiếu vuông góc và hình chiếu trục đo vuông góc đều của một vật thể ta cần tuân theo trình tự nào? Sắp xếp các bước sau để nhận được trình tự đúng.

a) Chọn hướng chiếu phù hợp.

b) Chỉnh sửa các nét vẽ và ghi kích thước.

c) Vẽ hình chiếu vuông góc của mỗi hình khối cấu tạo nên vật thể.

d) Phân tích vật thể thành các hình khối đơn giản.

e) Từ các hình chiếu vuông góc và hình biểu diễn của vật thể dựng hình chiếu trục đo.

f) Kẻ khung bản vẽ, khung tên để hoàn thành bản vẽ.

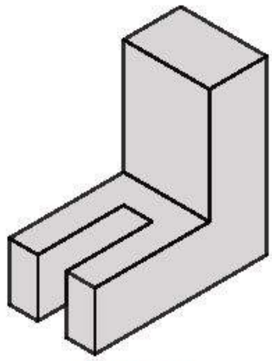
Khi lập bản vẽ kĩ thuật của một vật thể ta thực hiện theo các bước sau:

- *Bước 1:* Quan sát vật thể và phân tích vật thể thành các hình khối đơn giản.
- *Bước 2:* Chọn các hướng chiếu phù hợp, thường là các hướng vuông góc với các mặt của vật thể.
- *Bước 3:* Vẽ hình chiếu vuông góc của các hình khối cấu tạo nên vật thể.
- *Bước 4:* Xoá các nét thừa, chỉnh sửa các nét vẽ theo đúng tiêu chuẩn và ghi kích thước trên các hình chiếu.
- *Bước 5:* Từ ba hình chiếu vuông góc vừa vẽ, vẽ hình chiếu trục đo vuông góc đều của vật thể.
- *Bước 6:* Kẻ khung bản vẽ, khung tên, ghi các nội dung vào khung tên để hoàn thành bản vẽ.

Ví dụ 7. Lập bản vẽ kĩ thuật của vật thể giá chữ L được cho trong Hình 3.42. Kích thước của vật thể được cho như sau:

– Khối chữ L: chiều dài 60, chiều cao 60, chiều rộng 30 và bề dày 20.

– Rãnh hình hộp: chiều rộng 10, chiều dài 30 và chiều cao 20.

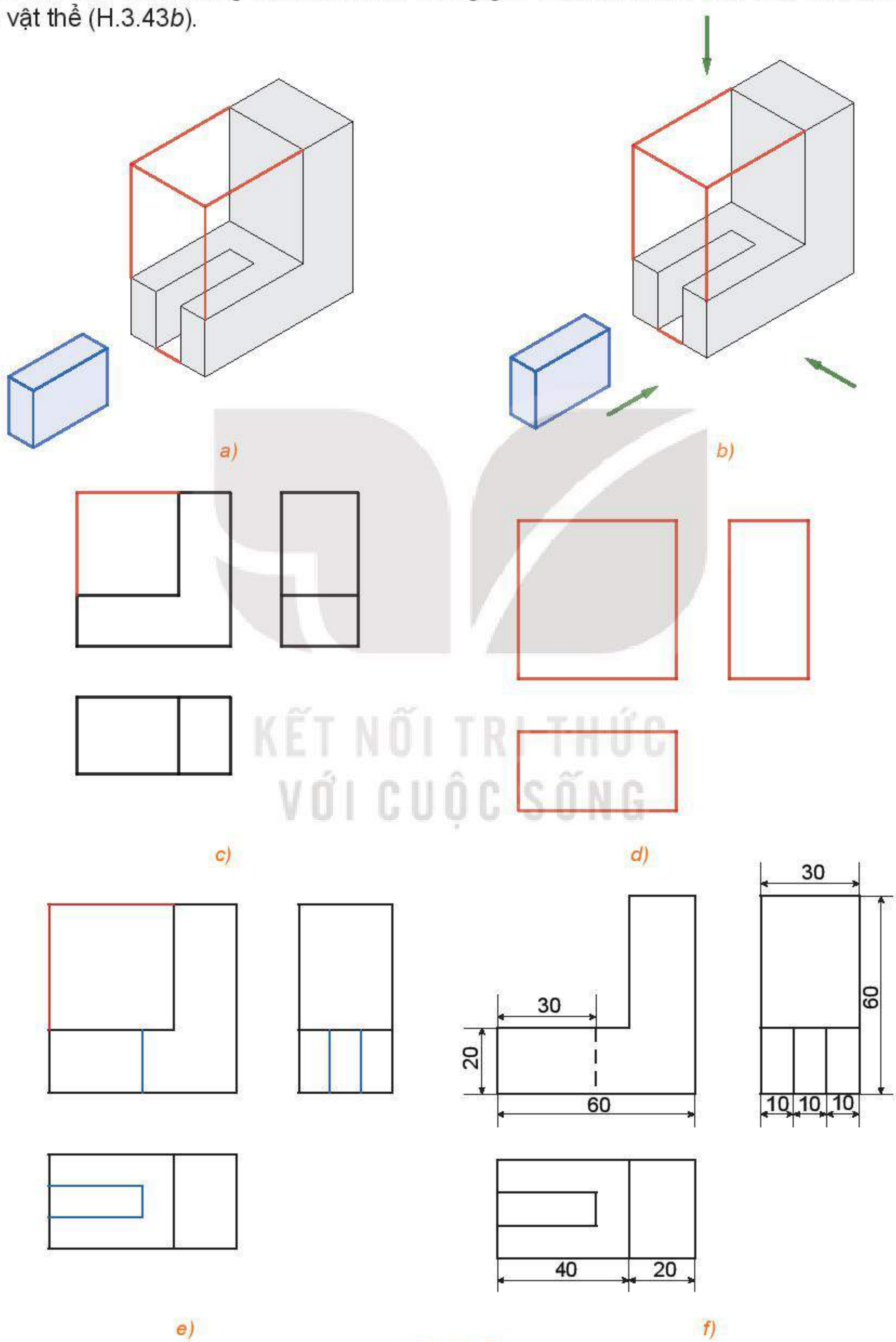


Hình 3.42

Giải

Bước 1. Nhận thấy rằng vật thể có dạng khối chữ L được bao bởi một hình hộp chữ nhật, phần nằm ngang của vật thể có rãnh cũng là hình hộp chữ nhật (H.3.43*a*).

Bước 2. Chọn các hướng chiếu lần lượt vuông góc với mặt trước, mặt trên và mặt bên trái của vật thể (H.3.43*b*).



Hình 3.43

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

Bước 3. Lần lượt vẽ hình chiếu vuông góc của hình hộp chữ nhật bao bên ngoài vật thể (H.3.43*c*), của khối chữ L (H.3.43*d*) và của rãnh hộp chữ nhật (H.3.43*e*).

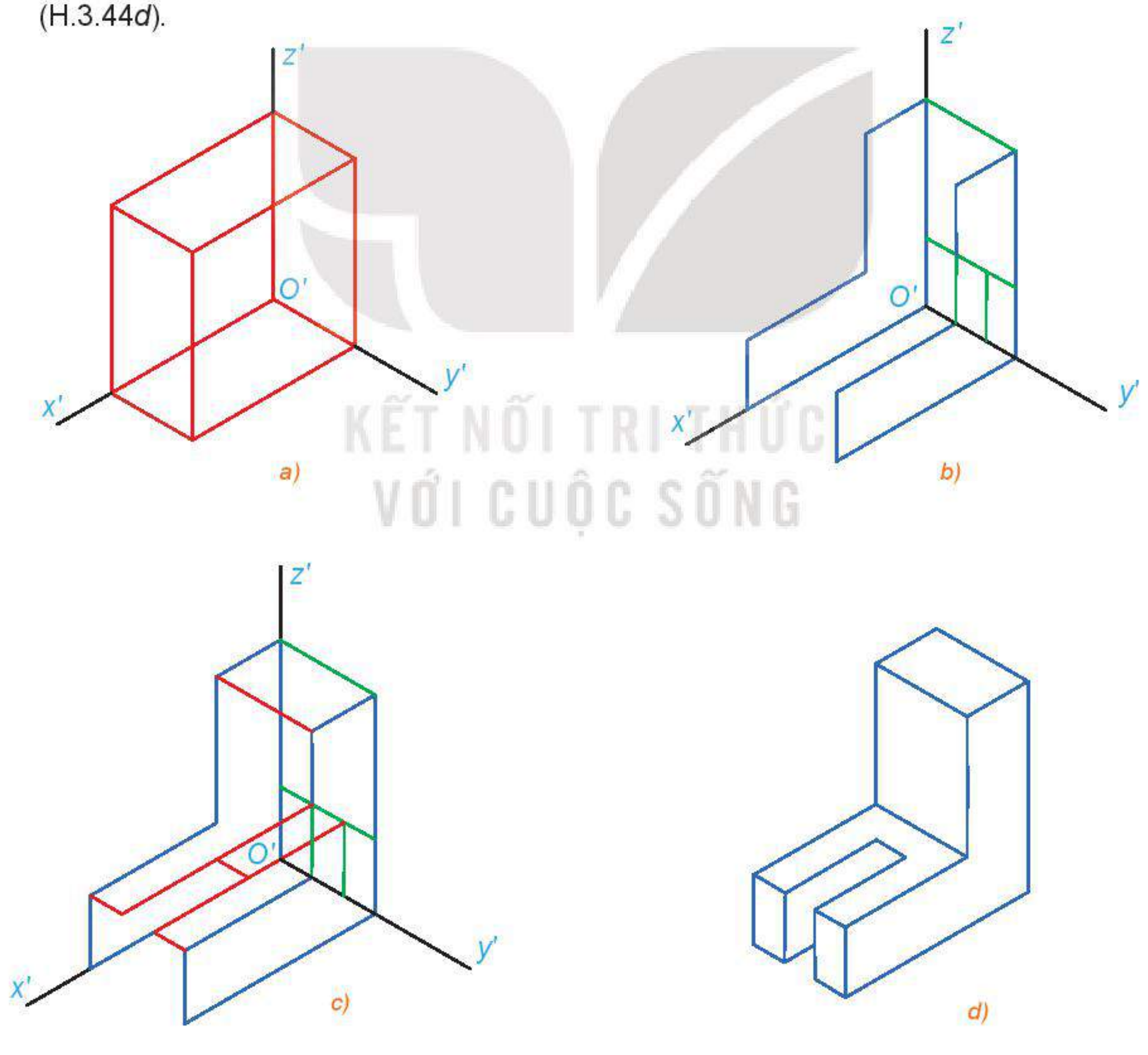
Bước 4. Xoá các nét thừa, chỉnh sửa các nét vẽ theo quy tắc: các đường thấy vẽ bằng nét liền; các đường khuất vẽ bằng nét đứt. Ghi các kích thước của vật thể trên các hình chiếu.

Bước 5: Vẽ hình chiếu trục đo vuông góc đều của vật thể.

– Vẽ ba trục đo *O'x'*, *O'y'*, *O'z'* đôi một tạo với nhau một góc 120°. Vẽ hình hộp chữ nhật bao bên ngoài của vật thể với các chiều nằm dọc theo các trục đo, các kích thước lần lượt là 60 (chiều dài), 30 (chiều rộng) và 60 (chiều cao) (H3.44*a*).

– Trên mặt nằm trong mp(*O'x'*, *O'z'*) và mặt song song với mp(*O'x'*, *O'z'*) của hình hộp chữ nhật, vẽ hình chiếu đứng theo đúng các kích thước của vật thể; trên mặt nằm trong mp(*O'y'*, *O'z'*) của hình hộp chữ nhật vẽ hình chiếu cạnh theo đúng các kích thước của vật thể (H3.44*b*).

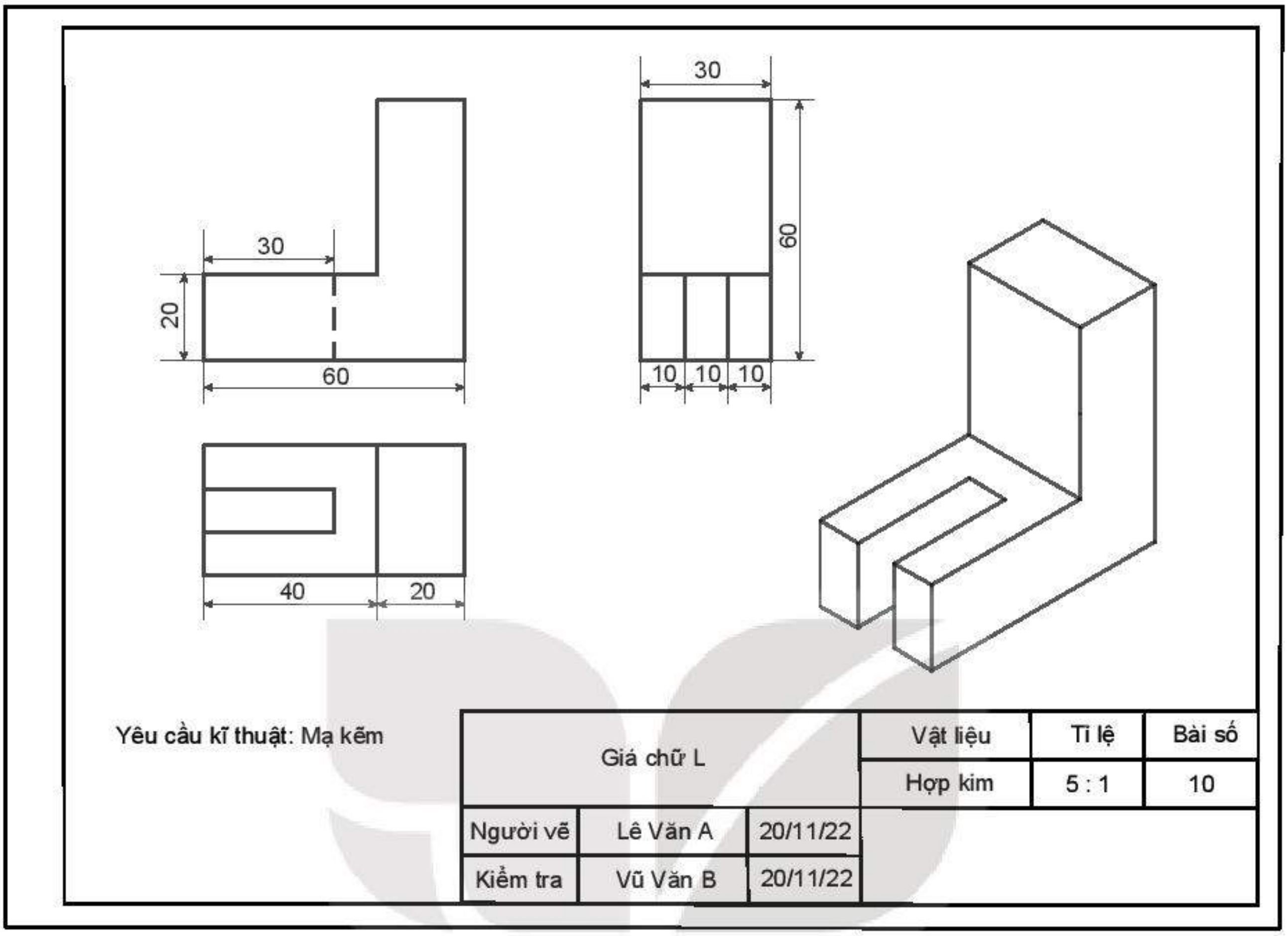
– Dựa vào hình chiếu bằng để xác định được mặt còn lại của vật thể (H.3.44*c*). Hoàn thành các nét còn thiếu, xoá các nét thừa, chỉnh sửa các nét vẽ theo tiêu chuẩn của nét vẽ (H.3.44*d*).



KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

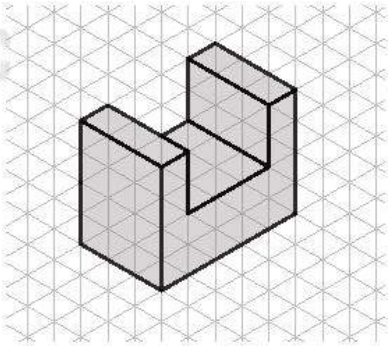
Hình 3.44

Bước 6. Hoàn thành khung tên, khung bản vẽ để được bản vẽ cuối cùng có dạng như trong Hình 3.45.



Hình 3.45

Luyện tập 7. Lập bản vẽ kĩ thuật của vật thể giá chữ U được biểu diễn trên giấy kẻ ô tam giác đều trong Hình 3.46. Quy ước mỗi cạnh của tam giác đều có chiều dài là 1 cm.

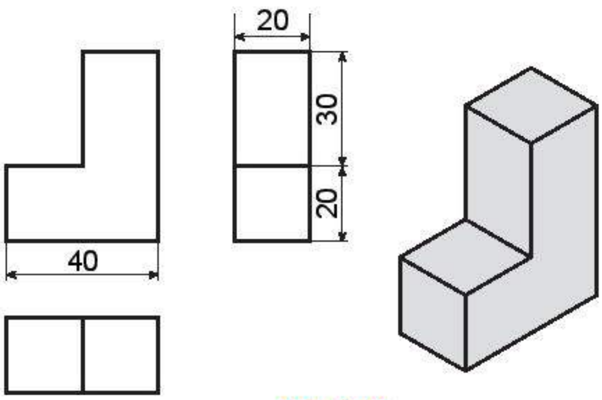


Hình 3.46

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

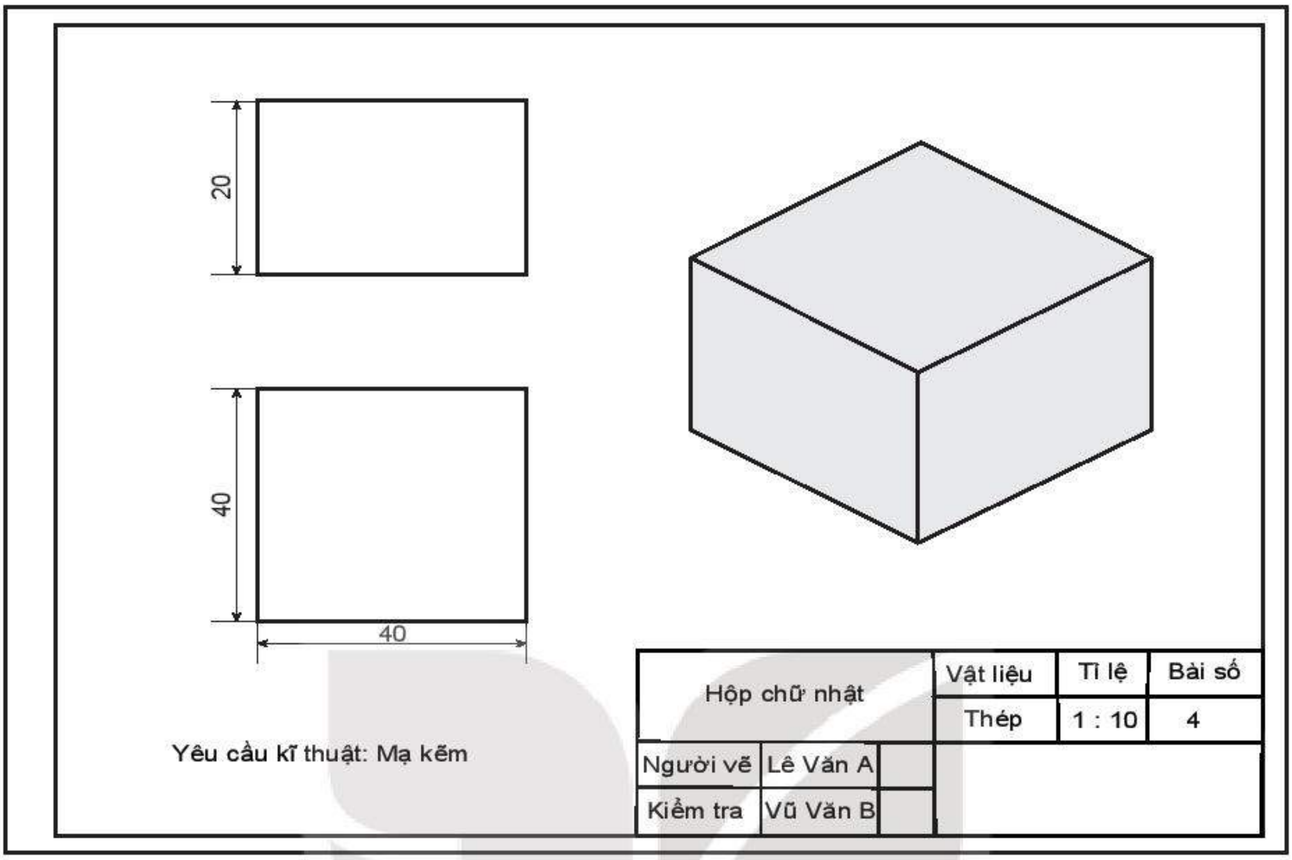
BÀI TẬP

3.12. Quan sát một phần bản vẽ được thể hiện trong Hình 3.47 và giải thích vì sao bản vẽ đó không đáp ứng nguyên tắc đầy đủ trong vẽ kĩ thuật.



Hình 3.47

3.13. Đọc bản vẽ kĩ thuật trong Hình 3.46.



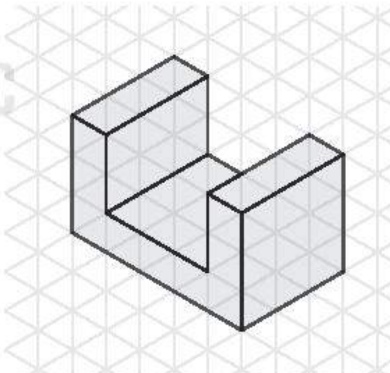
Hình 3.48

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

3.14. Lập bản vẽ kĩ thuật của vật thể giá chữ U được biểu diễn trên giấy kẻ ô tam giác đều trong Hình 3.49. Quy ước mỗi cạnh của tam giác đều có chiều dài là 1 cm.

3.15. Tính thể tích của vật thể được biểu diễn trên giấy kẻ ô tam giác đều trong Hình 3.46. Quy ước mỗi cạnh của tam giác đều có chiều dài là 1 cm.

3.16. Hãy chọn một vật thể đơn giản theo ý thích của mình và lập bản vẽ kĩ thuật cho vật thể đó.



Hình 3.49

BÀI TẬP CUỐI CHUYÊN ĐỀ 3

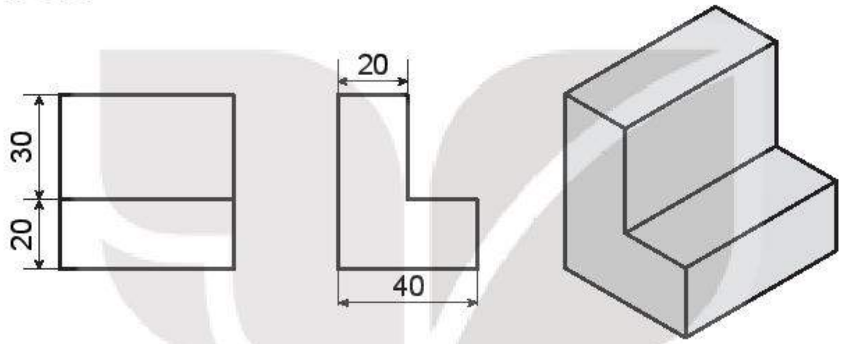
3.17. Cho hình hộp chữ nhật *ABCD.A'B'C'D'*. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a) Nếu mặt phẳng chiếu đứng song song với mặt phẳng (*ABB'A'*) thì các hình chiếu đứng của *A* và *D* trùng nhau.

b) Nếu mặt phẳng chiếu bằng song song với mặt phẳng (*ABCD*) thì các hình chiếu bằng của *C* và *C'* trùng nhau.

c) Nếu mặt phẳng chiếu cạnh song song với mặt phẳng (*BCC'B'*) thì các hình chiếu cạnh của *A* và *C* trùng nhau.

3.18. Bản vẽ trong Hình 3.50 có đáp ứng các nguyên tắc cơ bản của vẽ kĩ thuật hay không? Giải thích vì sao.



Hình 3.50

3.19. Trong không gian cho điểm *A* và ba mặt phẳng đôi một vuông góc (P_1), (P_2) và (P_3) giao nhau tại *O*. Gọi A_1, A_2, A_3 lần lượt là hình chiếu vuông góc của *A* trên các mặt phẳng (P_1), (P_2) và (P_3). Gọi *M*, *N*, *P* lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ *A* xuống các giao tuyến của (P_1) và (P_2), (P_2) và (P_3), (P_3) và (P_1).

a) Chứng minh $OA^2 = OM^2 + ON^2 + OP^2$.

b) Áp dụng ý a để chứng minh $OA = \sqrt{\dfrac{OA_1^2 + OA_2^2 + OA_3^2}{2}}$.

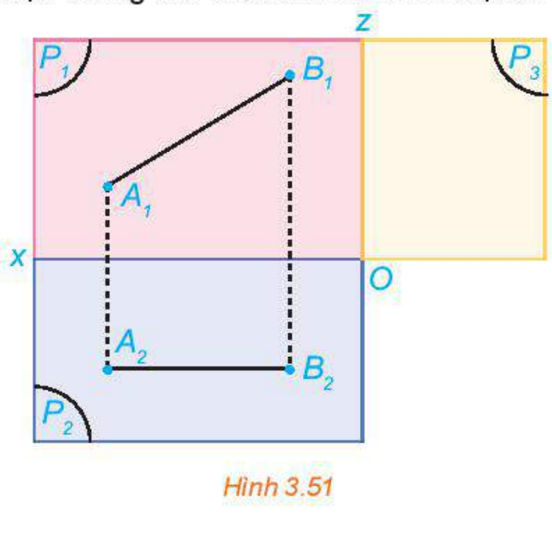
Sử dụng kết quả trên để tính độ dài của một đoạn thẳng mà ba hình chiếu có độ dài lần lượt là 1 cm, 2 cm và 3 cm.

3.20. Bạn Long nói rằng khi vẽ hình chiếu trục đo thì các hệ số biến dạng luôn nhỏ hơn hoặc bằng 1. Bạn Long nói đúng hay sai? Vì sao?

3.21. Hình 3.51 thể hiện hình chiếu đứng và hình chiếu bằng của một đoạn thẳng *AB* trong không gian.

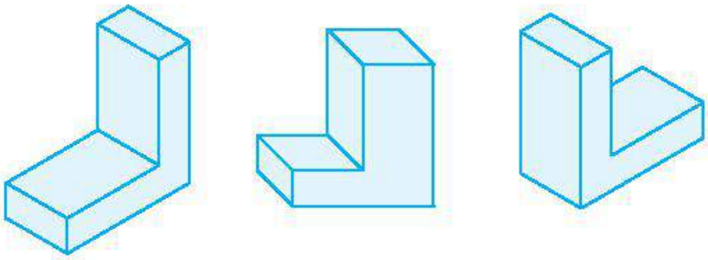
a) Xác định hình chiếu cạnh A_3B_3 của đoạn thẳng đó.

b) Biết $A_1B_1 = 10$ cm và $A_2B_2 = 6$ cm, tính độ dài của A_3B_3.



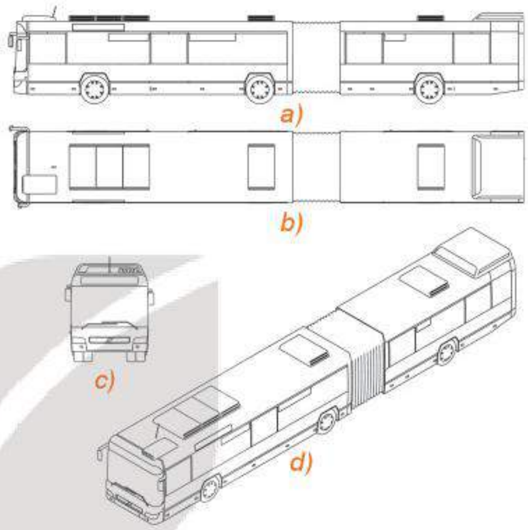
Hình 3.51

3.22. Sử dụng thước đo góc nếu cần thiết, hãy cho biết hình nào trong Hình 3.52 là hình chiếu trục đo vuông góc đều.



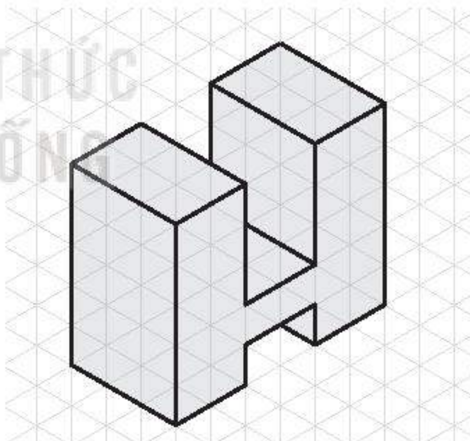
Hình 3.52

3.23. Bản vẽ ở Hình 3.53 mô tả vật thể nào trong thực tế? Cho biết hình nào là hình chiếu vuông góc, hình nào là hình chiếu trục đo của vật thể đó.



Hình 3.53

3.24. Một vật thể được biểu diễn trên giấy kẻ ô tam giác đều như trong Hình 3.54. Quy ước chiều dài mỗi cạnh của tam giác đều là 10 mm, hãy lập bản vẽ kĩ thuật của vật thể đó và tính thể tích của nó.



Hình 3.54

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

BẢNG TRA CỨU THUẬT NGỮ

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

BẢNG GIẢI THÍCH THUẬT NGỮ

Thuật ngữ	Giải thích
Bài toán người đưa thư (trong Lí thuyết đồ thị)	Bài toán tìm chu trình ngắn nhất đi qua tất cả các cạnh của một đồ thị cho trước
Bài toán tìm đường đi tối ưu (trong Lí thuyết đồ thị)	Bài toán tìm đường đi từ đỉnh A đến đỉnh L trong một đồ thị có trọng số sao cho tổng các trọng số trên các cạnh của đường đi là nhỏ nhất
Chu trình	Một đường đi khép kín, tức là đường đi có đầu đường trùng với cuối đường
Chu trình Euler	Một chu trình đơn giản chứa mọi cạnh của đồ thị
Chu trình Hamilton	Một chu trình sơ cấp chứa mọi đỉnh của đồ thị
Đồ thị	Tập hợp hữu hạn các điểm (gọi là các đỉnh của đồ thị) cùng với tập hợp các đoạn đường cong hay thẳng (gọi là cạnh của đồ thị) có đầu mút tại các đỉnh của đồ thị.
Đồ thị có trọng số	Đồ thị liên thông và mỗi cạnh được gắn với một số không âm, gọi là trọng số của cạnh đó
Đơn đồ thị	Một đồ thị không có khuyên, trong đó hai đỉnh được nối bằng nhiều nhất một cạnh.
Đường đi	Một dãy cạnh nối tiếp, nối hai đỉnh nào đó của đồ thị
Hai đỉnh kề nhau	Hai đỉnh của đồ thị được nối với nhau bằng một cạnh
Hai đỉnh liên thông	Hai đỉnh của một đồ thị gọi là liên thông nếu có một đường đi nối chúng.
Hai hình bằng nhau	Nếu có một phép dời hình, biến hình này thành hình kia.
Hai hình đồng dạng	Nếu có một phép đồng dạng, biến hình này thành hình kia.

KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam xin trân trọng cảm ơn các tác giả có tác phẩm, tư liệu được sử dụng, trích dẫn trong cuốn sách này.

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Chủ tịch Hội đồng Thành viên NGUYỄN ĐỨC THÁI
Tổng Giám đốc HOÀNG LÊ BÁCH

Chịu trách nhiệm nội dung:

Tổng biên tập PHẠM VĨNH THÁI

Biên tập nội dung: HOÀNG VIỆT – ĐẶNG THỊ MINH THU
Biên tập mĩ thuật: NGUYỄN BÍCH LA
Thiết kế sách: NGUYỄN ĐÌNH HƯƠNG
Trình bày bìa: NGUYỄN BÍCH LA
Minh hoạ: BÙI VIỆT DUY
Sửa bản in: NGUYỄN DUY LONG
Chế bản: CÔNG TY CỔ PHẦN MĨ THUẬT VÀ TRUYỀN THÔNG

Bản quyền thuộc Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

Tất cả các phần của nội dung cuốn sách này đều không được sao chép, lưu trữ, chuyển thể dưới bất kì hình thức nào khi chưa có sự cho phép bằng văn bản của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP TOÁN 11

Mã số: ...
In ... bản, (QĐ ...) khổ 19 x 26,5 cm.
Đơn vị in: ...
Địa chỉ: ...
Số ĐKXB: .../CXBIPH/.../GD
Số QĐXB: .../QĐ - GD - HN ngày ... tháng ... năm ....
In xong và nộp lưu chiểu tháng ... năm 20...
Mã số ISBN: ...

HUÂN CHƯƠNG HỒ CHÍ MINH

BỘ SÁCH GIÁO KHOA LỚP 11 – KẾT NỐI TRI THỨC VỚI CUỘC SỐNG

1. Ngữ văn 11, tập một
2. Ngữ văn 11, tập hai
3. Chuyên đề học tập Ngữ văn 11
4. Toán 11, tập một
5. Toán 11, tập hai
6. Chuyên đề học tập Toán 11
7. Lịch sử 11
8. Chuyên đề học tập Lịch sử 11
9. Địa lí 11
10. Chuyên đề học tập Địa lí 11
11. Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 11
12. Chuyên đề học tập Giáo dục Kinh tế và Pháp luật 11
13. Vật lí 11
14. Chuyên đề học tập Vật lí 11
15. Hoá học 11
16. Chuyên đề học tập Hoá học 11
17. Sinh học 11
18. Chuyên đề học tập Sinh học 11
19. Công nghệ 11 – Công nghệ cơ khí
20. Chuyên đề học tập Công nghệ 11 – Công nghệ cơ khí
21. Công nghệ 11 – Công nghệ chăn nuôi
22. Chuyên đề học tập Công nghệ 11 – Công nghệ chăn nuôi
23. Tin học 11 – Định hướng Khoa học máy tính
24. Tin học 11 – Định hướng Tin học ứng dụng
25. Chuyên đề học tập Tin học 11 – Định hướng Tin học ứng dụng
26. Chuyên đề học tập Tin học 11 – Định hướng Khoa học máy tính
27. Mĩ thuật 11 – Thiết kế mĩ thuật đa phương tiện
28. Mĩ thuật 11 – Thiết kế đồ hoạ
29. Mĩ thuật 11 – Thiết kế thời trang
30. Mĩ thuật 11 – Thiết kế mĩ thuật sân khấu, điện ảnh
31. Mĩ thuật 11 – Lí luận và lịch sử mĩ thuật
32. Mĩ thuật 11 – Điêu khắc
33. Mĩ thuật 11 – Kiến trúc
34. Mĩ thuật 11 – Hội hoạ
35. Mĩ thuật 11 – Đồ hoạ (tranh in)
36. Mĩ thuật 11 – Thiết kế công nghiệp
37. Chuyên đề học tập Mĩ thuật 11
38. Âm nhạc 11
39. Chuyên đề học tập Âm nhạc 11
40. Hoạt động trải nghiệm, hướng nghiệp 11
41. Giáo dục thể chất 11 – Bóng chuyền
42. Giáo dục thể chất 11 – Bóng đá
43. Giáo dục thể chất 11 – Cầu lông
44. Giáo dục thể chất 11 – Bóng rổ
45. Giáo dục quốc phòng và an ninh 11
46. Tiếng Anh 11 – Global Success – Sách học sinh

KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

Các đơn vị đầu mối phát hành

- **Miền Bắc:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Hà Nội
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Bắc
- **Miền Trung:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Đà Nẵng
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Trung
- **Miền Nam:** CTCP Đầu tư và Phát triển Giáo dục Phương Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục miền Nam
  CTCP Sách và Thiết bị Giáo dục Cửu Long

Sách điện tử: http://hanhtrangso.nxbgd.vn

Kích hoạt để mở học liệu điện tử: Cào lớp nhũ trên tem để nhận mã số. Truy cập http://hanhtrangso.nxbgd.vn và nhập mã số tại biểu tượng chìa khoá.

Giá: ... đ